Opérateurs positifs

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné tel que $T^* = T$.

a. Rappeler la définition de $|T|$. Montrer que $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$. *On pourra calculer* $\||T|(x)\|^2$.

b. Montrer que $(T - |T|)(T + |T|) = 0$.

c. On note $K_+ = \operatorname{Ker}(T + |T|)^\perp$, $K_- = \operatorname{Ker}(T - |T|)^\perp$.
Montrer que $K_+ \perp K_-$, puis que $K_+^\perp \cap K_-^\perp = \operatorname{Ker} T$.
On a ainsi une décomposition en somme directe orthogonale $H = K_- \oplus \operatorname{Ker} T \oplus K_+$.

d. Montrer que $T = |T|$ sur $K_+ \oplus \operatorname{Ker} T$ et $T = -|T|$ sur $K_- \oplus \operatorname{Ker} T$.
Montrer que $T(K_+) \subset K_+$ et $T(K_-) \subset K_-$.

e. Montrer qu'il existe deux opérateurs **positifs** T_+, $T_- \in \mathcal{L}(H)$ tels que $T = T_+ - T_-$ et $|T| = T_+ + T_-$.

f. Montrer que $T \leq |T|$.

Exercice 2. On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

b. Montrer que l'adjoint T^* de T est un opérateur à noyau.
On précisera quel est le noyau $K^* : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ correspondant à T^*.

c. Soit T_1, T_2 les opérateurs à noyaux associés à deux fonctions K_1, $K_2 \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$.
Montrer que $T_3 = T_1 \circ T_2$ est encore un opérateur à noyau. *On exprimera la fonction K_3 correspondante comme une intégrale à paramètres faisant intervenir K_1 et K_2.*

d. On considère le cas où $K_1(s,t) = t^s$ et $K_2(s,t) = s^t$, en convenant que $0^0 = 0$.
Calculer le noyau K_3 correspondant à $T_1 \circ T_2$.

e. On considère le noyau $K : (s,t) \mapsto (s + t + 1)^{-1}$.
Montrer que l'opérateur à noyau T associé à K est un opérateur positif.

Exercice 3. On considère l'espace H des fonctions ξ réelles absolument continues sur $[0,1]$ (donc dérivables presque partout), nulles en 0 et telles que $\xi' \in L^2([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\xi\| = \|\xi'\|_2$. Autrement dit, H est l'espace des fonctions $\xi : x \mapsto \int_0^x f$ avec $f \in L^2([0,1], \mathbb{R})\}$, et on a alors $f = \xi'$ presque partout.

a. Montrer que H est un espace de Hilbert. Quel est le produit scalaire hermitien $(\cdot|\cdot)$ correspondant ?

b. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ la forme linéaire $\varphi_t : \xi \mapsto \xi(t)$ est continue sur H.

c. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ il existe $\eta_t \in H$ telle que $(\eta_t|\xi) = \varphi_t(\xi)$ pour toute $\xi \in H$.

d. Montrer que $\eta_t(s) = \min(s,t)$ pour tous s, $t \in [0,1]$.

e. Montrer que pour toute $f \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ il existe un vecteur $\eta_f \in H$ tel que $\forall \xi \in H \ (\xi|\eta_f) = \int_0^1 (\xi|\eta_t) f(t) \mathrm{d}t$.

f. Montrer que l'opérateur à noyau T sur $L^2([0,1], \mathbb{R})$ associé au noyau $K(s,t) = \min(s,t)$ est positif.