Révisions

Exercice 1. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

- $a_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$,
- $b_n = \sin e^{-n}$,
- $c_n = n \sin \frac{1}{n}$,
- $d_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+\ln n}$,
- $e_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$,
- $f_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
- $g_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$,
- $h_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n$,
- $k_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$,
- $l_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$,
- $m_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,
- $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.

Exercice 2.

a. Justifier la convergence de la série $(\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

b. Donner un équivalent simple de $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Peut-on en déduire la nature de la série $(\sum u_n)$?

c. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Conclure quand à la nature de $(\sum u_n)$.

d. Déterminer de même la nature de $(\sum v_n)$ pour $v_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 3. On définit une suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, puis que $\lim_n(u_{n+1}^2 - u_n^2) = 2$.

b. (i) Rappeler le théorème de comparaison des sommes partielles.
   (ii) À l'aide d'une série télescopique, en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

c. On pose $v_n = u_n^2 - 2n$.
   (i) En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent simple de $v_{n+1} - v_n$.
   (ii) On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. Déterminer un équivalent simple de v_n.
   (iii) Montrer que
$$u_n = \sqrt{2n} + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 4. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

a. Montrer qu'on a $\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} \leq S_n \leq \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$ pour tout $n \geq 3$.

b. En déduire un équivalent simple de S_n.

c. Montrer le développement asymptotique
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{2n^2\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).$$

d. On pose $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$. Montrer que $(\sum_n u_{n+1} - u_n)$ converge.

e. En déduire l'existence d'une constante C telle que $S_n = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$.

Exercice 5. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

Exercice 6. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}.$$

Montrer que la limite est uniforme.

Exercice 7. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1-x)^n$.

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b. Montrons que la convergence est uniforme.

  (i) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $x \in [0, \epsilon]$ et pour tout n on a $|f_n(x)| \leq \epsilon$.

  (ii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(1-\epsilon)^n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

  (iii) Montrer que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0,1]$ on a $|f_n(x)| \leq \epsilon$.

c. Question subsidiaire : montrer que le résultat est encore valable pour $f_n : x \mapsto h(x)(1-x)^n$, où h est une fonction continue et nulle en 0.

Exercice 8. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre fixé. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$.

c. Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g ?

d. Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 1$.

e. On prend $\alpha = 1$. Montrer que $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout n et tout $x \in [0,1]$. Montrer que $\lim I_n = 0$.

f. Montrer que $x^{\alpha-1}f_n(x)$ est bornée sur $[0,1]$. Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 2$.

g. Calculer I_n pour tout n. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim I_n = 0$?

Exercice 9. Pour tout $x \geq 0$ on définit une suite $(f_n(x))_n$ en posant $f_0(x) = x$ et

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right).$$

Pour $x > 0$ on pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}$.

a. Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.
En déduire une expression de $g_n(x)$ en fonction de n et $g_0(x)$.
Étudier g_0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_n$.

c. Exprimer $f_n(x)$ en fonction de x et $g_n(x)$.
Déterminer la limite simple r de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

d. On fixe $a > 0$ et $b > a$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers r sur $[a,b]$.