Séries entières

Exercice 1. Considérons la série de fonctions de terme général $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \cos(\frac{n\pi}{3}) z^{2n+1}$.

a. Écrire cette série de fonctions sous la forme d'une série entière $(\sum a_n x^n)$ en précisant la valeur des coefficients a_n.
b. La suite $(a_n)_n$ est bornée. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence ?
c. Dire pourquoi la série $(\sum_n a_n)$ diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence ?
d. Quel est le domaine de définition de la série de fonctions $(\sum_n u_n)$?

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

$$a_n = \frac{z^n}{n\pi^n}, \qquad b_n = \ln(n) z^{2n}, \qquad c_n = \frac{(n+1)^4}{n!} z^n, \qquad d_n = \frac{z^n}{2^{3n-2}}, \qquad e_n = (1+i)^{2n} z^{3n}.$$

Exercice 3. On pose $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n \mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.
On pourra justifier puis utiliser l'encadrement $2t \leq 1 + t^2 \leq 2$ sur $[0,1]$.

Exercice 4. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ina}}{n!}$ puis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n!}$, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 5. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ à l'aide d'une série entière.

Exercice 6. Donner le rayon de convergence R des séries entières suivantes et calculer leur somme sur le disque ouvert de convergence.

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n!} z^n\right), \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} n(n+2) z^{n+1}\right), \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(2n)!}\right), \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3 z^n}{n!}\right).$$

Exercice 7. *(CC2 2023)*
On considère la série entière $\left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)$ avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n+1}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
b. Montrer que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)$ converge normalement sur $[-R, R]$.
   On note $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ sa somme.
c. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. Exprimer f' comme somme d'une série entière.
d. On pose $g(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner les DSE de g' puis de g en 0.
   On admettra (et on ne demande pas de redémontrer) que le rayon de convergence de ces DSE vaut 1.
e. En comparant les deux questions précédentes, donner une expression de $f'(x)$ sans le symbole somme, pour tout $x \in]-R, R[$.
f. À l'aide d'un calcul intégral, donner une expression de f sans le symbole symbole sur $]-R, R[$.
   L'identité $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ *peut éventuellement être utile.*
g. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8. Développer en série entière au point 0 les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue :

$$f_1(x) = \log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right), \qquad f_2(x) = \frac{4}{x^2-2x+2}, \qquad f_3(x) = e^x \cos x,$$

$$f_4(x) = (\cos x)^3, \qquad f_5(x) = \int_0^x \frac{1}{t} \arctan(t^2) \mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de $f_4^{(k)}(0)$ pour tout k.

Exercice 9.

a. Déterminer le DSE de $f : x \mapsto \ln(x)$ en $x_0 = 2$.

b. Déterminer le DSE en $x_0 = 1$ de la fonction f_2 de l'exercice 8.

Exercice 10. On note c_n les coefficients du DSE en 0 de $f : x \mapsto (\ln(1-x))^2$.

a. (i) Rappeler le DSE en 0 de $\ln(1-x)$.
 (ii) Donner une expression de c_n sous forme d'une somme.
 (iii) Exprimer c_n en fonction des sommes harmoniques $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b. (i) Vérifier l'expression $-2\ln(1-x) = (1-x)f'(x)$, pour tout $x \in]-1, 1[$.
 (ii) En déduire une relation de récurrence pour la suite $(d_n)_n = (nc_n)_n$.
 (iii) Retrouver le résultat de la question a.

Exercice 11.

a. Montrer qu'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.

b. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0, et déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

c. Calculer les trois premiers termes du DSE.

Exercice 12. On fixe $|a| < 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a^n x)$.

a. Montrer que $f(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1, puis C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'un série.
En déduire que $|f^{(k)}(x)| \leq 1/(1-|a|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d. Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer son DSE en 0.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.

a. Montrer que f est développable en série entière au point 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$.

c. En déduire le développement en série entière au point 0 de f.

d. Démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}$.

Exercice 14. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$, en recherchant des solutinons développables en série entière en 0.

Exercice 15. On considère la fonction $f : x \mapsto x/(e^x - 1), 0 \mapsto 1$ définie sur $\mathbb{R}$ entier. On définit les *nombres de Bernoulli* B_k en posant $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k / k!$.

a. Montrer que la fonction est développable en série entière en 0. *Cela justifie la définition précédente.*

b. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3 en effectuant un DL en 0. *On pourra utiliser un* DL_4 *de* exp.

c. On a $(e^x - 1)f(x) = x$. En effectuant un produit de Cauchy, démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0. \tag{1}$$

En déduire la valeur de B_4.

d. Vérifier que $f(x) + x = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

e. On rappelle que $\tanh(z) = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})i\pi$, et que $\tan(x) = -i\tanh(ix)$.
Vérifier que $f(4z) - f(2z) = z\tanh(z) - z$ pour z proche de 0.
En déduire les coefficients des DSE en 0 de tanh et tan en fonction des nombres de Bernoulli.