

DÉRIVÉES PARTIELLES ET EXTRÊMUMS

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- $f : (x, y) \mapsto x^2y + 2x - 3y + 12$,
- $f : (x, y) \mapsto 2xy^3 + 3xy - y$,
- $f : (x, y) \mapsto xy \cos(y) + \sin(xy)$,
- $f : (x, y) \mapsto (x + 2y)(2x + y) + \sin(x)$,
- $f : (x, y) \mapsto e^{xy} + (x - y)^2$,
- $f : (x, y) \mapsto \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$,
- $f : (x, y, z) \mapsto x^2z + xyz + yz^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f(xye^{(x^2-y^2)})$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de f' .

Exercice 3.

a. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

- (i) Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f . On notera u, v, w les variables de f .
- (ii) Vérifier que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t, t, t) = 0.$$

b. Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = g(t, t, t)$.

- (i) Calculer h' en fonction des dérivées partielles de g .
- (ii) Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 4. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(0, 0) = 1$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

- a. Vérifier que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- b. En étudiant la restriction de f aux droites d'équation $y = ax$, montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
- c. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en $(0, 0)$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} + (x + 1)^2 + y.$$

- a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 et qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
- b. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles par rapport à x et y qu'on calculera.
- c. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(a, 0)$ pour $a \neq 0$.

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions définies par les expressions suivantes, et vérifier la validité du théorème de Schwarz :

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}; \quad g(x, y) = x^y; \quad h(x, y, z) = xz^3 + y^2z + xy^4z.$$

Exercice 7. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, xy) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g .

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer.
- f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 10. Rechercher les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature :

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y; \quad g(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2; \quad h(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 3^3.$$

Exercice 11. Étudier les extrémums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

- $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$,
- $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
- $f(x, y) = (4x - 3y)e^{-(x^2 + y^2)}$,
- $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

Exercice 12. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + yz + 2zx - xyz$.

- Déterminer les points critiques de f .
Indication : on peut factoriser $x - z$ dans l'expression de $\partial f / \partial x - \partial f / \partial z$.
- Écrire les formes quadratiques hessiennes aux points critiques, les décomposer en carrés et conclure quant à la nature des points critiques.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par l'égalité $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^6$.

- Déterminer les points critiques de f .
- Montrer que $f(y^3, y)$ est du signe de y si $0 < |y| < \frac{1}{2}$.
En déduire que f n'admet pas d'extrémum local en $(0, 0)$.
- Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f aux autres points critiques.
- Montrer que f admet $\frac{-1}{432}$ comme minimum local atteint en 2 points.
- Montrer que si $f(x, y) \leq 0$ alors $xy^2 + y^6 \leq 0$ et $x^2 + xy^2 \leq 0$.
En déduire que $f^{-1}(]-\infty, 0]) \subset A$, où $A = [-1, 0] \times [-1, 1]$.
- Montrer que f admet un minimum global et donner sa valeur.

Exercice 14.

On considère les sous-ensembles suivant de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}, & O &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 - x^2\}, \\ P &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \text{ et } y \geq 0\}, & I &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

On considère par ailleurs la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (3x^2 + 2x)y - 2x$.

- Représenter O, P , et I sur un dessin. Exprimer F à l'aide de O, P et I .
- Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur F .
- (i) Déterminer les points critiques de f sur \mathbb{R}^2 .
(ii) Montrer que les extrémums globaux de f sur F sont atteints en des points de $P \cup I$.
On ne cherchera pas à déterminer ces points.
- (i) Déterminer les extrémums de f sur I et préciser en quels points ils sont atteints.
(ii) Déterminer les extrémums de f sur P et préciser en quels points ils sont atteints.
On pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x, 1 - x^2)$.
(iii) Quels sont les extrémums globaux de f sur F ? En quels points sont-ils atteints ?