CONTRÔLE CONTINU N°1

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail.

Les deux exercices sont indépendants.

Question de cours.

- Rappeler la définition du rayon de convergence R d'une série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$.
- Si $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 2^n)$ diverge, que peut-on en déduire pour R ?

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-nx}$.

- Déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série numérique $(\sum_{n \geq 1} f_n(x))$ converge.
On note f la somme de la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$, définie là où la série converge.
- On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Tracer le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}$.
On fera figurer les limites en $-\infty, +\infty$ et les valeurs des extrémums locaux de f_n . $f'_n(x) = x(2-nx)e^{-nx}$
- Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
- On note F_n la primitive de f_n nulle en 0. On fixe $a > 0$. Montrer qu'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(a) = \int_0^a f(t) dt.$$

- Par une double intégration par parties on peut calculer F_n . *On ne demande pas de faire ce calcul.*
On trouve $F_n(x) = \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^3}(n^2 x^2 + 2nx + 2)e^{-nx}$.
Justifier le fait que F_n est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.
En déduire la convergence normale de la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} F_n)$ sur $\mathbb{R}_+$.

- À l'aide des questions précédentes, démontrer l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx - 1}{2^n x^2}$. $f'_n(x) = (2 - nx)/(2^n x^3)$

On admet que la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge simplement sur $]0, 1]$ et on note f sa somme.

- Justifier soigneusement la convergence de la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)2^{-n})$.
- On fixe $a \in]0, 1]$.
 - Montrer soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, 1]$ on a $|f_n(x)| \leq \frac{n+1}{2^n a^2}$.
Il est inutile de procéder à une étude de fonction.
 - Montrer que f est continue sur $]0, 1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on pose $g_n(x) = x^2 f_n(x)$.
 - Montrer que $(\sum g_n)$ converge normalement sur $]0, 1]$.
 - En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.