Contrôle Continu n°2

Durée : 2h30. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x+1}$.

a. Déterminer le développement en série entière de f autour du point $x_0 = 2$.
On précisera le rayon de validité du DSE.

b. En déduire la valeur de $f^{(2k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Dans cet exercice on s'intéresse à la série entière $\Big(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n^2}\Big)$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
La série converge aussi en R et $-R$, on note $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ sa somme.
On ne demande pas de démontrer la convergence de la série en R et $-R$.

b. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$.

c. Justifier la dérivabilité de f sur $]-R, R[$ et écrire f' comme somme d'une série entière.

d. Exprimer f' sans le symbole somme sur $]0, R[$.

e. On pose $g(x) = f(x) + f(1-x) + (\ln x)\ln(1-x)$ pour $x \in]0, R[$.
Montrer que g est constante sur $]0, R[$.

f. Démontrer la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = (\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}n^2}$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en posant $f(x, y) = 0$ si $x + y = 0$, et sinon

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 3y - 2xy}{x+y}.$$

a. La fonction f admet-elle une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$? et par rapport à y en $(0,0)$?
Lorsqu'une dérivée partielle existe on donnera sa valeur.

b. On se place maintenant sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}$.
Calculer les dérivées partielles de f sur U.

c. Déterminer les points critiques de f dans U.

d. On admet les expressions suivantes des dérivées partielles secondes de f sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6y(y-1)}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3x-3y-6xy}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6x(x+1)}{(x+y)^3}.$$

Déterminer la nature du point critique $(0, 3/2)$.

suite au verso

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dont on note x, y, z les variables. On définit une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $h(t) = g(t,t,t)$.

a. Calculer h' en fonction des dérivées partielles de g.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dont on note u, v, w les variables. On suppose maintenant que g est donnée par la formule $g(x,y,z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$.

b. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

c. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

On pourra utiliser soit la question a, soit la question b.