Épreuve de seconde session

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto n^{-4} \cos(n\sqrt{x})$.

a. Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ converge simplement.
On note $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la somme de cette série.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n')$ sur $[a, +\infty[$, pour $a > 0$ fixé.

d. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. On considère la série entière $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n! \times (2n+1)} x^{2n+1}\right)$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
On note f la somme de cette série entière sur $]-R, R[$.

b. Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée comme somme d'une série entière.

c. Calculer f'. On attend une expression sans le symbole somme.

d. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $f(x, y) = (2x + y)e^{-x^2-y^2}$.

a. Déterminer les points critiques de f.

b. On admet qu'en l'un des deux points critiques (x_0, y_0) on a les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{18}{\sqrt{10e}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{4}{\sqrt{10e}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{12}{\sqrt{10e}}.$$

Écrire la forme quadratique hessienne de f au point (x_0, y_0). En déduire la nature de ce point critique.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, dont on note x et y les variables.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(2t, 3t)$.

a. On suppose que f est de classe C^1.
Calculer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ en fonction des dérivées partielles de f.

b. On considère le cas où f est donnée par la formule $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

(i) Justifier le fait que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(ii) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

(iii) Calculer g. La formule du a. est-elle valable pour $t = 0$? Expliquer.