Révisions

Exercice 1. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

- $a_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$,
- $b_n = \sin e^{-n}$,
- $c_n = n \sin \frac{1}{n}$,
- $d_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+\ln n}$,
- $e_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$,
- $f_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
- $g_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$,
- $h_n = \dfrac{(3n)!}{3^n(n!)^3}$,
- $k_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n$,
- $l_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$,
- $m_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$,
- $p_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2(2+\cos n)}$,
- $q_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,
- $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.

Exercice 2. Soient a, $b > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$.
Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$. On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de a et b.
Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de nombres réels. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et justifier la réponse (c'est-à-dire démontrer l'énoncé s'il est vrai et trouver un contre-exemple s'il est faux).

a. Si la suite (u_n) est positive, décroissante et a pour limite 0, alors la série $(\sum u_n)$ converge.
b. Si la série $(\sum u_n)$ converge et $u_n \geq 0$ pour tout n alors la série $(\sum \sqrt{u_n})$ converge.
c. Si la série $(\sum u_n)$ converge et $u_n \geq 0$ pour tout n alors la série $(\sum u_n^2)$ converge.
d. Si la série $(\sum u_n)$ converge alors la série $(\sum u_n^2)$ converge.
e. Si $u_n \sim (-1)^n/n^2$, alors la série $(\sum u_n)$ converge.
f. Si $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$, alors la série $(\sum u_n)$ converge.

Exercice 4. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
b. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
  (i) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
  (ii) Montrer que $(\sum(u_{n+1} - u_n))$ converge.
c. Montrer qu'il existe un réel l tel que $S_n = 2\sqrt{n} + l + o(1)$.

Exercice 5. On définit une suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, puis que $\lim_n(u_{n+1}^2 - u_n^2) = 2$.
b. (i) Rappeler le théorème de comparaison des sommes partielles.
  (ii) À l'aide d'une série télescopique, en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.
c. On pose $v_n = u_n^2 - 2n$.
  (i) En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent simple de $v_{n+1} - v_n$.
  (ii) On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. Déterminer un équivalent simple de v_n.
  (iii) Montrer que
$$u_n = \sqrt{2n} + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 6.

a. Justifier la convergence de la série $(\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.
b. Donner un équivalent simple de $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Peut-on en déduire la nature de la série $(\sum u_n)$?
c. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Conclure quand à la nature de $(\sum u_n)$.
d. Déterminer de même la nature de $(\sum v_n)$ pour $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 7. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}.$$

Exercice 8. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x+n^2x^3}{1+n^2x^2}.$$

En procédant à une étude de fonction, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 9. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx+\cos(nx)}{x^2+n}.$$

En utilisant un majorant indépendant de x, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 10. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformémentsur $\mathbb{R}_+$?
c. Montrer que pour tout n et tout $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq 1/nx$.
d. On fixe un réel $a > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 11. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre fixé. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$.
c. Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g ?
d. Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 1$.
e. On prend $\alpha = 1$. Montrer que $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout n et tout $x \in [0,1]$. Montrer que $\lim I_n = 0$.
f. Montrer que $x^{\alpha-1}f_n(x)$ est bornée sur $[0,1]$. Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 2$.
g. Calculer I_n pour tout n. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim I_n = 0$?

Exercice 12. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1-x)^n$.
a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Montrons que la convergence est uniforme, sans étude de fonction. On fixe $\epsilon > 0$.
 (i) Montrer que pour tout $x \in [0, \epsilon]$ et pour tout n on a $|f_n(x)| \leq \epsilon$.
 Montrer que pour tout $x \in [\epsilon, 1]$ et pour tout n on a $|f_n(x)| \leq (1-\epsilon)^n$.
 (ii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(1-\epsilon)^n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$.
 (iii) Montrer que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0,1]$ on a $|f_n(x)| \leq \epsilon$. Conclure.
c. Question subsidiaire : montrer que le résultat est encore valable pour $f_n : x \mapsto h(x)(1-x)^n$, où h est une fonction continue et nulle en 0.

Exercice 13. Pour tout $x \geq 0$ on définit une suite $(f_n(x))_n$ en posant $f_0(x) = x$ et

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right).$$

Pour $x > 0$ on pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}$.
a. Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.
 En déduire une expression de $g_n(x)$ en fonction de n et $g_0(x)$.
 Étudier g_0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_n$.
c. Exprimer $f_n(x)$ en fonction de x et $g_n(x)$.
 Déterminer la limite simple r de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
d. On fixe $a > 0$ et $b > a$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers r sur $[a, b]$.