

SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$.

- Montrer que la série numérique $(\sum_n f_n(1))$ converge.
- Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur \mathbb{R} .
- Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R} .
- Montrer que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R} . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R} . En déduire que g est continue.
- Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = xe^{-nx}$.

- La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}_+ ?
- Converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? et sur $[2, +\infty[$? *On procédera à une étude de fonction.*
- Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Calculer les restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ pour $x = 1/n$.
- La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$.

- Soit a un réel strictement positif. Montrer $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $[-a, a]$.
- Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la fonction somme.
 - Montrer f est continue sur \mathbb{R} .
 - Montrer f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 5. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{n + x^3}{x + n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R}_+ . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- La série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ?
- On fixe $a > 0$.
 - Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n + a^3)/n^3$.
 - Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.
- Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 6. *D'après le CC1 2024.*

On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{n + (-1)^n x^3}{x + n^3}$.

- On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer un équivalent simple de la suite $(f_n(x))_n$.
 - Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
- On fixe $a > 0$.
 - Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n + a^3)/n^3$.
 - Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.
- On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 7. On considère les séries de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$, $(\sum_{n \geq 1} g_n)$ où

$$f_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^3}, \quad g_n(x) = \frac{x^2}{n^3 + x^3}.$$

Ces séries convergent-elles normalement sur \mathbb{R}_+ ? sur $[0, a]$ pour a fixé ?

Exercice 8. D'après le CC1 2024. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

On admet la convergence simple de la série de fonctions $(\sum g_n)$ sur \mathbb{R}_+^* , ce qui justifie la définition de sa somme g ci-dessus. On admet également que pour $a > 0$ fixé on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [a, +\infty[\ |g_n(t)| \leq e^{-na}$. On pourra donc utiliser cette inégalité dans la suite du sujet sans avoir à la justifier.

- On fixe $a > 0$. Les assertions suivantes sont-elles correctes ? Justifier les réponses.
 - La série de fonctions $(\sum g_n)_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
 - La série de fonctions $(\sum g_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
 - La suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
- Montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ existe et déterminer sa valeur.
- On fixe $a > 0$. Montrer que g est dérivable sur $[a, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, calculer $g'(x)$ sous la forme d'une formule sans signe somme.
- En déduire la valeur de $g(x)$, à nouveau sans signe somme.
- Montrer que pour tous $0 < a < b$ on a

$$\int_a^b \ln(1 - e^{-t}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nb} - e^{-na}}{n^2}.$$

- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$.

On rappelle la valeur de la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, qu'il n'est pas demandé de justifier.

Exercice 9. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ .
- La série $(\sum f_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? sur $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$?
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

Exercice 10.

- Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que la fonction $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est positive et décroissante.
- Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, $S_n(x) \leq S(x)$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = +\infty$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$ on pose $f_n(x) = 1/(n+n^2x)$ et $g_n(x) = xf_n(x)$.

- Montrer que $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* . On note f sa somme.
- Pour n fixé, déterminer le sens de variation de f_n sans dériver.
Étudier la convergence normale de $(\sum f_n)$ sur \mathbb{R}_+^* , sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ fixé.
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* , déterminer sa limite en $+\infty$.
- En procédant à une étude de fonction, montrer que $(\sum g_n)$ converge normalement sur \mathbb{R}_+^* .
- En déduire que $f(x) \sim \pi^2/6x$ en $+\infty$.

Questions subsidiaires : étude en 0.

- On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \in]0, 1/N[$ on a $f(x) \geq \sum_{n=1}^N 1/2n$. Montrer que pour tout $A > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[\ f(x) \geq A$. Autrement dit, $\lim_{0^+} f = +\infty$.
- On fixe $x > 0$ et on pose $h(t) = 1/(t+t^2x)$. Quel est le sens de variation de h ? À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\ln(1+x) - \ln(x) \leq f(x) \leq \ln(1+x) - \ln(x) + 1/(1+x).$$

(On pourra vérifier que $H : t \mapsto \ln(t/(1+tx))$ est une primitive de h .) En déduire un équivalent de f en 0^+ .

Exercice 12. Pour tout $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

- a. Justifier le fait que $\zeta(x)$ et $f(x)$ sont bien définies pour $x > 1$. Calculer $f(x)$.
 Montrer que la suite de fonction $(d_n)_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction d à déterminer.
- b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$ on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

En déduire un encadrement de $d(x) - d_n(x)$.

- c. Montrer que la suite de fonctions $(d_n)_n$ converge uniformément vers d .
- d. Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ les sommes partielles de la série harmonique.
 On rappelle qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
 Montrer qu'on a $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

Exercice 13. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $x > 0$ on rappelle que $x^z = \exp(z \ln(x)) \in \mathbb{C}$. On considère les séries de fonctions

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{et} \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

- a. Montrer que $|x^z| = x^{\operatorname{Re}(z)}$. En déduire que ζ et η sont bien définies et continues sur $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$.
- b. On pose $g_n(z) = (-1)^{n+1}/n^z$.

(i) Montrer qu'on a $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z) = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2n})^z}{(2n-1)^z}$.

En déduire un équivalent simple de $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Montrer que $(\sum_{n \geq 1} g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z))$ converge absolument si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(iii) En déduire que η est bien définie sur $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

- c. (i) Lorsque $\operatorname{Re}(z) > 1$, déterminer une relation entre $\zeta(z)$ et $\eta(z)$.
 On pourra observer les simplifications dans la différence $\zeta(s) - \eta(z)$.
- (ii) Déterminer l'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - 2^{1-z} = 0\}$.

On étend ζ à $K' = K \setminus Z$ grâce à la relation entre ζ et η . C'est en fait l'unique manière de prolonger ζ en une fonction dérivable *au sens complexe* sur K' . On peut alors poser la fameuse question : si z est un zéro de ζ dans la bande $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, a-t-on nécessairement $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$?