

SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1. Considérons la série de fonctions de terme général $u_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)z^{2n+1}$.

- Écrire cette série de fonctions sous la forme d'une série entière $(\sum a_n x^n)$ en précisant la valeur des coefficients a_n .
- La suite $(a_n)_n$ est bornée. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence ?
- Dire pourquoi la série $(\sum_n a_n)$ diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence ?
- Quel est le domaine de définition de la série de fonctions $(\sum_n u_n)$?

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

$$a_n = \frac{z^n}{n\pi^n}, \quad b_n = \ln(n)z^{2n}, \quad c_n = \frac{(n+1)^4}{n!}z^n, \quad d_n = \frac{z^n}{2^{3n-2}}, \quad e_n = (1+i)^{2n}z^{3n}.$$

Exercice 3. On pose $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$. Déterminer le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.
On pourra justifier puis utiliser l'encadrement $2t \leq 1+t^2 \leq 2$ sur $[0, 1]$.

Exercice 4. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ina}}{n!}$ puis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n!}$, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 5. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ à l'aide d'une série entière.

Exercice 6. Donner le rayon de convergence R des séries entières suivantes et calculer leur somme.

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+1}{n!} z^n\right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} n(n+2) z^{n+1}\right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{(2n)!}\right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3 z^n}{n!}\right).$$

Exercice 7. (CC2 2023)

On considère la série entière $(\sum_{n \geq 1} f_n(x))$ avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} x^{2n+1}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n(x))$ converge normalement sur $[-R, R]$.
On note $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.
- Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$. Exprimer f' comme somme d'une série entière.
- On pose $g(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner les DSE de g' puis de g en 0.
On admettra (et on ne demande pas de redémontrer) que le rayon de convergence de ces DSE vaut 1.
- En comparant les deux questions précédentes, donner une expression de $f'(x)$ sans le symbole somme, pour tout $x \in] -R, R[$.
- À l'aide d'un calcul intégral, donner une expression de f sans le symbole somme sur $] -R, R[$.
L'identité $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ peut éventuellement être utile.
- Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8. Développer en série entière au point 0 les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue :

$$f_1(x) = \log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right), \quad f_2(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 2}, \quad f_3(x) = e^x \cos x,$$

$$f_4(x) = (\cos x)^3, \quad f_5(x) = \int_0^x \frac{1}{t} \arctan(t^2) dt.$$

En déduire la valeur de $f_4^{(k)}(0)$ pour tout k .

Exercice 9.

- Déterminer le DSE de $f : x \mapsto \ln(x)$ en $x_0 = 2$.
- Déterminer le DSE en $x_0 = 1$ de la fonction f_2 de l'exercice 8.

Exercice 10. (CC2 2024) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-2)}$.

- Trouver trois réels a, b, c tels qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
- En déduire le développement en série entière de f en 0. Quel est son rayon de validité?
On commencera par écrire f comme somme de deux séries entières, puis on précisera les coefficients a_n qui permettent d'écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exercice 11. (CC2 2024)

On considère l'équation différentielle (E) $xy'' + y = 0$, où y est la fonction inconnue et x est la variable.

- On suppose que y est une solution de (E) sur $] -r, r[$, avec $r > 0$, qui est développable en série entière sur $] -r, r[$, et on écrit son DSE sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
 - Exprimer $xy''(x)$ comme somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, avec des coefficients b_n à préciser en fonction des a_n .
 - Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie une relation de récurrence à préciser.
 - Déterminer les coefficients a_n en fonction de a_1 .
- Montrer que (E) admet une unique solution y développable en série entière en 0 et telle que $y'(0) = 1$. On ne demande pas de calculer la somme de la série entière correspondante.
- Question subsidiaire. On pose $J_1(t) = \frac{2}{t} y(\frac{t^2}{4})$, où y est solution de (E). Montrer que J_1 vérifie l'équation de Bessel $t^2 z'' + tz' + (t^2 - 1)z = 0$.

Exercice 12. On considère la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) $(1-x^2)y' - xy = 1$.
- Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière en 0.
Montrer que les coefficients a_n vérifient une relation de récurrence que l'on précisera.
- Montrer que (E) admet une unique solution y DSE en 0 et telle que $y(0) = 0$. Déterminer les coefficients a_n et le rayon de convergence de son DSE. Par unicité des solutions de (E) on a alors $y = f$.

Exercice 13. On considère la fonction $f : x \mapsto x/(e^x - 1), 0 \mapsto 1$ définie sur $\mathbb{R}$ entier. On définit les nombres de Bernoulli B_k en posant $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k / k!$.

- Montrer que la fonction est développable en série entière en 0. Cela justifie la définition précédente.
- Calculer B_0, B_1, B_2, B_3 en effectuant un DL en 0. On pourra utiliser un DL_4 de $\exp$.
- On a $(e^x - 1)f(x) = x$. En effectuant un produit de Cauchy, démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0. \quad (1)$$

En déduire la valeur de B_4 .

- Vérifier que $f(x) + x = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.
- On rappelle que $\tanh(z) = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})i\pi$, et que $\tan(x) = -i \tanh(ix)$.
Vérifier que $f(4z) - f(2z) = z \tanh(z) - z$ pour z proche de 0.
En déduire les coefficients des DSE en 0 de $\tanh$ et $\tan$ en fonction des nombres de Bernoulli.

Exercice 14. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 0} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{-n} e^{in^2 x}$.

- Calculer $f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{N}$. On pourra commencer par $k = 1$.
 - Montrer que $(\sum f_n^{(k)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pourra commencer par $k = 0$.
 - On note $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Montrer que f est dérivable et calculer f' comme somme d'une série de fonction.
- Grâce à la question b, on peut montrer de même (par récurrence) que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'on a $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(k)}(0)$ comme somme d'une série numérique.
En déduire : $|f^{(k)}(0)| \geq k^{2k} e^{-k} \geq k! k^k e^{-k}$.
 - Déterminer le rayon de convergence de la série entière $(\sum k^k e^{-k} x^k)$.
 - Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0?