Dérivées partielles et extrémums

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
- $f : (x, y) \mapsto x^2y + 2x - 3y + 12$,
- $g : (x, y) \mapsto 2xy^3 + 3xy - y$,
- $h : (x, y) \mapsto xy\cos(y) + \sin(xy)$,
- $i : (x, y) \mapsto (x + 2y)(2x + y) + \sin(x)$,
- $j : (x, y) \mapsto e^{xy} + (x - y)^2$,
- $k : (x, y) \mapsto \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$,
- $l : (x, y, z) \mapsto x^2z + xyz + yz^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f\big(xye^{x^2-y^2}\big)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de f'.

Exercice 3. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(0, 0) = 1$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

a. Vérifier que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
b. En étudiant la restriction de f aux droites d'équation $y = ax$, montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
c. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en $(0, 0)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} + (x + 1)^2 + y.$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
b. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles par rapport à x et y qu'on calculera.
c. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(a, 0)$ pour $a \neq 0$.

Exercice 5. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions définies par les expressions suivantes, et vérifier la validité du théorème de Schwarz :

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}; \qquad g(x, y) = x^y; \qquad h(x, y, z) = xz^3 + y^2z + xy^4z.$$

Exercice 6. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, xy) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 7. Soit $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$. Une fonction f de cette forme est dite *radiale*. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Un fonction f telle que $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0$ est dite *harmonique*. Déterminer toutes les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.

c. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. Rechercher les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature :

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y; \qquad g(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2; \qquad h(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy - 3^3.$$

Exercice 10. Étudier les extrémums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$,

b. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

c. $f(x,y) = (4x - 3y)e^{-(x^2+y^2)}$,

d. $f(x,y) = (x - y)e^{xy}$.

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto xy + yz + 2zx - xyz$.

a. Déterminer les points critiques de f.
Indication : on peut factoriser $x - z$ dans l'expression de $\partial f/\partial x - \partial f/\partial z$.

b. Écrire les formes quadratiques hessiennes aux points critiques, les décomposer en carrés et conclure quant à la nature des points critiques.

Exercice 12. *(CC2 2024)* On pose $U = \mathbb{R}^2$.

a. Dans cette question on étudie la fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2e^{2x} - 2ye^x$.
   (i) Vérifier que $P = (0,1)$ est un point critique de φ. Y en a-t-il d'autres ?
   (ii) Écrire la forme quadratique hessienne $q(h,k)$ de φ au point P.
   (iii) À l'aide de la question précédente, déterminer la nature du point critique P.

b. Dans cette question on fixe une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ dont on note u, v les variables.
Pour $(x,y) \in U$ on pose $f(x,y) = g(x, ye^x)$.
   (i) Calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
   (ii) Montrer que f admet un point critique en $(x,y) \in U$ si et seulement si g admet un point critique en (x, ye^x).

c. Dans cette question on utilise les notations des questions a. et b.
Trouver une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ telle qu'on ait $\varphi = f$.
Le point P de la question a. est-il un extrémum global pour φ ?

Exercice 13. *(CC2 2023)* On introduit un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\} \quad \text{et} \quad f(x,y) = x^2y(1 - x - y).$$

a. (i) Montrer que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in F$.
   (ii) Représenter F, ainsi que les points $(x,y) \in F$ pour lesquels $f(x,y) = 0$.
   (iii) Montrer, avec tout le détail nécessaire, que f est bornée et atteint ses bornes sur F.
   (iv) Quelle est le minimum de f sur F ? En quel(s) point(s) est-il atteint ?

b. (i) Déterminer les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2$.
   (ii) Quel est le maximum de f sur F ? En quel(s) point(s) de F est-il atteint ? Justifier.
   Il est inutile de calculer les dérivées partielles secondes de f. On pourra en revanche utiliser l'ensemble $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$.