Algèbres enveloppantes quantifiées :

Théorie élémentaire des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

Notes d'exposé, Roland Vergnioux, 11-18 juin 2008

1 Contexte classique

Soit G un groupe de Lie compact, réel, connexe et simplement connexe. L'espace des champs de vecteurs invariants à gauche sur G, muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ de G. On note $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie complexifiée, c'est une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Soit $T\mathfrak{G}$ l'algèbre tensorielle construite sur $\mathfrak{G}$, on note $U = U(\mathfrak{G})$ le quotient de $T\mathfrak{G}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $xy - yx - [x, y]$ avec x, $y \in \mathfrak{G}$. C'est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$, elle vérifie la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & U \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

où les flêches pleines sont des morphismes d'algèbres de Lie, tandis que la flêche verticale est un morphisme d'algèbres unifère. On montre que l'application canonique $i : \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ est injective.

Soit Rep_G la catégorie des représentations de G sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Elle est munie de la structure monoïdale donnée par $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$. Soit $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{G}}$ la catégorie des représentations d'algèbres de Lie sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Elle est munie de la structure monoïdale donnée par $x \cdot (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot w)$. Soit enfin Rep_U la catégorie des U-modules de dimension finie. Elle est munie de la structure monoïdale qui provient de la structure de cogèbre sur U donnée par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, pour tout $x \in \mathfrak{G}$. Notons que U est en fait une algèbre de Hopf, pour la co-unité et l'antipode données par les formules $\epsilon(x) = 0$ et $S(x) = -x$, pour tout $x \in \mathfrak{G}$. L'existence de Δ, ϵ et S est assurée par la propriété universelle de U. Cette algèbre de Hopf est cocommutative : on a $\sigma \circ \Delta = \Delta$, où $\sigma : x \otimes y \to y \otimes x$ est la volte.

Le foncteur de Lie permet d'associer à toute représentation $(G \to GL(V))$ dans Rep_G une représentation $(\mathfrak{G} \to L(V_{\mathbb{C}})) \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{G}}$, et cela définit en fait une équivalence de catégories monoïdales (grâce à la simple connexité de G). La propriété universelle permet d'associer à toute représentation V de $\mathfrak{G}$ une représentation $(U \to L(V)) \in \mathrm{Rep}_U$, et on obtient clairement une nouvelle équivalence de catégories monoïdales.

Prenons $G = SU(2)$. Alors $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr} A = 0,\ A^* = A\}$ et $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr} A = 0\}$, munies du crochet de Lie usuel. On considère la base suivante de $\mathfrak{G}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui engendre par définition l'algèbre $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. On vérifie facilement les égalités $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, et on peut montrer que $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ est en fait présentée par X, Y, H et ces relations.

Concernant la théorie des représentations, on montre qu'il existe un système de représentants des U-modules simples $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\dim V_n = n+1$, $V_n^* \simeq V_n$ et

$$V_n \otimes V_m \simeq V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \cdots \oplus V_{|n-m|}.$$

La volte σ est un isomorphisme entre $V \otimes W$ et $W \otimes V$ pour tous V, W — c'est le cas pour toute catégorie des représentations d'un groupe ou d'une algèbre de Hopf cocommutative.

2 Définition

On sait donner, dans le cas général d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{G}$, une présentation de $U(\mathfrak{G})$ en fonction de la « matrice de Cartan » (a_{ij}) et des « longueurs des racines » (d_i) associées à $\mathfrak{G}$. Si (α_i) est une base d'un système de racines de $\mathfrak{G}$, on a les formules

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i | \alpha_j)}{\|\alpha_i\|^2} \quad \text{et} \quad d_i = \|\alpha_i\|^2,$$

relativement à un produit scalaire invariant tel que $\min(d_i) = 1$. Notons que $a_{ij} = 0$ si $d_i \neq d_j$. Ici les indices varient entre 1 et r, le rang de $\mathfrak{G}$. On a $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ pour $i \neq j$ et $d_i \in \{1, 2, 3\}$.

Alors l'algèbre enveloppante $U = U(\mathfrak{G})$ est engendrée par $3r$ éléments H_i, X_i, Y_i qui sont dans $\mathfrak{G}$, et les relations

$$\begin{gathered}
[H_i, H_j] = 0, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij} H_i, \\
[H_i, X_j] = a_{ij} X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ij} Y_j, \\
\mathrm{ad}(X_i)^{1-a_{ij}}(X_j) = 0, \quad \mathrm{ad}(Y_i)^{1-a_{ij}}(Y_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j.
\end{gathered}$$

Notons que les deux dernières relations (relations de Serre) s'écrivent $[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$ lorsque $a_{ij} = 0$. La formule du binôme donne

$$\mathrm{ad}(X_i)^{1-a_{ij}}(X_j) = \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} X_i^{1-a_{ij}-k} X_j X_i^k.$$

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ qui n'est pas une racine de l'unité. Dans la définition suivante on utilise les q-nombres, q-factorielles et q-coefficients binômiaux donnés par :

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n_q][n-1]_q \cdots [1]_q, \quad \binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

On a $[1]_q = [1]_q! = [0]_q! = 1$. Si q est une racine de l'unité ($q \neq 1, -1$), les nombres $[n]_q$ et $[n]_q!$ sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais peuvent être nuls. Cependant même dans ce cas on dispose des q-coefficients binômiaux, définis par exemple par récurrence via la q-formule de Pascal.

Définition 2.1 *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. On note r le rang de $\mathfrak{G}$, (a_{ij}) la matrice de Cartan associée à $\mathfrak{G}$, (d_i) les longueurs des racines. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $q^{2d_i} \neq 1$ pour tout i.*

On note $U_q(\mathfrak{G})$ la $\mathbb{C}$-algèbre unifère engendrée par $3r$ éléments E_i, F_i, K_i, avec K_i inversible pour tout i et les relations suivantes :

$$K_iK_j = K_jK_i, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$
$$K_iE_jK_i^{-1} = q_i^{a_{ij}}, \quad K_iF_jK_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}}F_j,$$
$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-k}E_jE_i^k = 0 \quad si\ i \neq j,$$

ainsi que la relation analogue à la dernière obtenue en remplacant les E par des F. Remarquons que ces deux dernières relations s'écrivent $[E_i, E_j] = [F_i, F_j] = 0$ lorsque $a_{ij} = 0$.

Dans les articles fondateurs de Drinfeld et Jimbo, la deuxième relation fait apparaître des carrés : $[E_i, F_j] = \delta_{ij}(K_i^2 - K_i^{-2})/(q_i^2 - q_i^{-2})$. Cela ne modifie pas de manière essentielle les résultats qui seront exposés dans la suite.

Pour se convaincre que $U_q(\mathfrak{G})$ est effectivement une déformation de $U(\mathfrak{G})$, on fait tendre q vers 1 en posant $q = e^h$, $K_i = e^{hd_iH_i}$, $E_i = X_i$, $F_i = Y_i$. Alors

$$K_iE_jK_i^{-1} = X_j + hd_i[H_i, X_j] + o(h), \quad q_i^{a_{ij}}E_j = X_j + hd_ia_{ij}X_j + o(h),$$
$$\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} = H_i + o(1), \quad [n]_{q_i} = n + o(1),$$

donc les relations de la définition redonnent, au premier ordre non nul, les relations classiques de $U(\mathfrak{G})$. De même la structure de Hopf de la proposition suivante redonne la structure classique lorsque $q \to 1$.

On peut rendre ce raisonnement heuristique rigoureux en travaillant avec une présentation en termes de H_i, X_i, Y_i et des séries formelles en h.

Proposition 2.2 *Les formules suivantes définissent une structure d'algèbre de Hopf sur $U_q(\mathfrak{G})$:*

$$\begin{array}{ll}\Delta(E_i) = 1 \otimes E_i + E_i \otimes K_i, & \epsilon(E_i) = 0, \\ \Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes F_i, & \epsilon(F_i) = 0, \\ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, & \epsilon(K_i) = 1,\end{array}$$

$$S(E_i) = -E_i K_i^{-1}, \quad S(F_i) = -K_i F_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}.$$

PREUVE. Il faut vérifier que les formules définissent bien un morphisme Δ, un caractère ϵ et un antimorphisme S, en vérifiant par exemple que $\mathcal{E}_i = \Delta(E_i)$, $\mathcal{F}_i = \Delta(F_i)$ et $\mathcal{K}_i = \Delta(K_i)$ vérifient dans $U_q(\mathfrak{G}) \otimes U_q(\mathfrak{G})$ les relations de définition de $U_q(\mathfrak{G})$. Le calcul est assez technique dans le cas des relations de Serre, et utilise des propriétés des q-coefficients binômiaux. Ensuite les axiomes des algèbres de Hopf sont immédiats à vérifier sur E_i, F_i et K_i, et n'utilisent pas les relations de définition de $U_q(\mathfrak{G})$. ∎

3 Représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

Dans le cas de $\mathfrak{sl}_2$ on a $r = 1$, $a_{11} = 2$, $d_1 = 1$. Ainsi, pour $q \notin \{-1, 0, 1\}$ l'algèbre $U_q = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est engendrée par E, F, K avec K inversible et les relations

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F, \tag{1}$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{2}$$

Soit V un U_q-module, on note encore E, F, K les images des générateurs dans $L(V)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $V^\lambda \subset V$ le sous-espace propre de K associé à λ. On dit que v est un vecteur de poids λ si $v \neq 0$ et $v \in V^\lambda$. On dit que $v \neq 0$ est un vecteur de plus haut poids (resp. de plus bas poids) si v est un vecteur propre de K et $Ev = 0$ (resp. $Fv = 0$).

Dans tout ce qui suit on suppose que q n'est pas une racine de l'unité, et tous les modules sont supposés de dimension finie, sauf précision contraire.

Lemme 3.1 *Tout U_q-module non nul contient un vecteur de plus haut poids.*

PREUVE. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, K admet un vecteur propre v, et la valeur propre λ associée est non nulle car K est inversible. D'après (1) on a $EV^\lambda \subset V^{q^2\lambda}$, donc pour tout n on a $E^n v \in V^{q^{2n}\lambda}$. Comme q n'est pas une racine de l'unité et $\lambda \neq 0$, les nombres $q^{2n}\lambda$ sont deux-à-deux distincts. Comme K ne peut pas avoir une infinité de valeurs propres, la suite $(E^n v)$ est nulle à partir d'un certain rang. Son dernier terme non nul est un vecteur de plus haut poids. ∎

En particulier tout U_q-module simple est engendré par un vecteur de plus haut poids. On peut décrire très précisément les modules engendrés par un vecteur de plus haut poids.

Proposition 3.2 *Soit V un U_q-module engendré par un vecteur de plus haut poids v. Alors le poids de v vaut $\pm q^n$, où $\dim V = n+1$. De plus il existe une base $(v = v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de V dans laquelle on a, en posant $v_{-1} = v_{n+1} = 0$:*

$$Kv_k = \pm q^{n-2k}, \quad Fv_k = [k+1]_q v_{k+1}, \quad Ev_k = \pm[n-k+1]_q v_{k-1}. \tag{3}$$

Preuve. Soit λ le poids de v. Comme q n'est pas une racine de l'unité, on peut poser $v_k = (F^k v)/[k]_q!$. En faisant le même raisonnement que pour la preuve du lemme, on voit que $v_k \in V^{q^{-2k}\lambda}$ pour tout k, et que la suite (v_k) est nulle à partir d'un certain rang. Soit v_p le dernier terme non nul. Comme les v_k avec $0 \leq k \leq p$ sont des vecteurs propres de K associés à des valeurs propres distinctes, on a $p \leq n$.

Les formules donnant Fv_k et Kv_k résultent immédiatement de la définition de v_k, si on admet la valeur de λ. Calculons Ev_k à l'aide de (2) :

$$\begin{aligned}[k]_q Ev_k = EFv_{k-1} &= FEv_{k-1} + \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} v_{k-1} \\ &= FEv_{k-1} + \frac{\lambda q^{-2(k-1)} - \lambda^{-1} q^{2(k-1)}}{q-q^{-1}} v_{k-1}.\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre que Ev_{k-1} est un multiple de v_{k-2}, et on trouve

$$Ev_k = \frac{\lambda q^{-k+1} - \lambda^{-1} q^{k-1}}{q-q^{-1}} v_{k-1},$$

ce qui donne la formule annoncée si on admet la valeur de λ.

Ces formules montrent en particulier que le sous-espace engendré par $v_0, \ldots, v_p$ coïncide avec le sous-module engendré par $v = v_0$. Par hypothèse, (v_i) est donc une base de V et $p = n$. Enfin, la formule pour Ev_{n+1}, qui vaut 0, donne $\lambda q^{-n} - \lambda^{-1} q^n = 0$, et on a donc bien $\lambda = \pm q^n$. ■

Corollaire 3.3 *Un U_q-module est simple **ssi** il est engendré par un vecteur de plus haut poids, qui est alors unique à un multiple scalaire près. Deux modules simples sont isomorphes **ssi** les poids correspondants sont égaux. L'ensemble des poids ainsi associés aux modules simples de dimension finie est $\{\pm q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve. Soit V un module engendré par un vecteur de plus haut poids v. La proposition montre les vecteurs de plus haut poids de V sont les multiples de v. Soit $W \subset V$ un sous-module. D'après le lemme, W admet un vecteur de plus haut poids w. C'est aussi un vecteur de plus haut poids de V, donc un multiple de v, qui engendre V. On a donc $W = V$, et V est simple.

Il est clair que les poids correpondants à deux modules simples isomorphes sont égaux. Inversement si deux modules simples ont des poids égaux, ils ont la même dimension et les formules (3) montrent qu'il existe un isomorphisme envoyant un vecteur de plus haut poids du premier sur un vecteur de plus haut poids du second.

Enfin pour montrer qu'il existe un sous-module simple de poids $\pm q^n$, on prend $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_n$ et on définit l'action de E, F et K par les formules (3). Il reste alors à vérifier que ces applications linéraires vérifient les relations (1) et (2), ce qui est un exercice facile. ∎

Remarquons qu'on peut construire pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ un U_q-module de dimension infinie engendré par un vecteur de plus haut poids λ : on pose $V(\lambda) = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, on appelle $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique, et on définit l'action de E, F, K par les formules

$$Kv_k = \lambda q^{-2k} v_k, \quad Fv_k = \tfrac{q^{k+1}-q^{-k-1}}{q-q^{-1}} v_k, \quad Ev_k = \tfrac{\lambda q^{-k+1}-\lambda^{-1}q^{k-1}}{q-q^{-1}} v_{k-1}.$$

Lorsque λ n'est pas de la forme $\pm q^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, le « module de Verma quantique » $V(\lambda)$ est irréductible et de dimension infinie. Lorsque $\lambda = \pm q^n$, le module $V(\lambda)$ admet un unique sous-module non trivial $U_q \cdot v_{n+1} \simeq V(\pm q^{-n-2})$ — en particulier il n'est pas semi-simple — et le quotient correspondant est isomorphe au module simple de dimension finie de plus haut poids $\pm q^n$.

Si on prend la variante « avec carrés » de la relation (2) pour la définition de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, les résultats ci-dessus restent valables avec les modifictions suivantes : les poids sont de la forme $i^k q^n$, et il y a donc 4 modules simples non isomorphes de dimension $n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant le même genre de techniques, on démontre le résultat important suivant :

Théorème 3.4 *Si q n'est pas une racine de l'unité, tout U_q-module de dimension finie est somme de modules simples.*

Nous admettrons ce résultat — on pourrait aussi convenir pour la suite de travailler dans la catégorie des modules *semi-simples* de dimension finie.

4 Règles de fusion

Rappelons que $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf définie par les formules $\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0$, $\epsilon(K) = 1$ et

$$\Delta(E) = 1\otimes E + E\otimes K, \quad \Delta(F) = F\otimes 1 + K^{-1}\otimes F, \quad \Delta(K) = K\otimes K,$$
$$S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(K) = K^{-1}.$$

On définit également un caractère $\eta : U_q \to \mathbb{C}$ en posant $\eta(E) = \eta(F) = 0$ et $\eta(K) = -1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $V_{\pm,n}$ un U_q-module simple de plus haut poids $\pm q^n$. On pose également $V_{+,n} = V_n$, $V_{+,0} = \mathbb{C}_\epsilon$ et $V_{-,0} = \mathbb{C}_\eta$. Notons que les modules $V_{\pm,0}$ sont bien de dimension 1, avec des représentations données par ϵ et η. On fixe des vecteurs non nuls $1 \in \mathbb{C}_\epsilon$, $1 \in \mathbb{C}_\eta$.

On a $\mathbb{C}_\eta \otimes V_{\pm,n} \simeq V_{\pm,n} \otimes \mathbb{C}_\eta \simeq V_{\mp,n}$ pour tout n. En effet, soit $v \in V_{\pm,n}$ de plus haut poids, alors $1 \otimes v$ engendre $\mathbb{C}_\eta \otimes V_{\pm,n}$ et on a

$$\begin{aligned} E \cdot (1 \otimes v) &= \Delta(E)(1 \otimes v) = 1 \otimes Ev + E1 \otimes Kv = 0, \\ K \cdot (1 \otimes v) &= \Delta(K)(1 \otimes v) = K1 \otimes Kv = \mp q^n (1 \otimes v). \end{aligned}$$

Fixons des bases (v_i), (v'_i) de $V_{\pm,n}$ et $V_{\mp1,n}$ comme à la proposition 3.2. Alors un isomorphisme entre $\mathbb{C}_\eta \otimes V_{\pm1,n}$ (resp. $V_{\pm,n} \otimes \mathbb{C}_\eta$) et $V_{\mp1,n}$ est donné par $(1 \otimes v_i \mapsto (-1)^i v'_i)$ (resp. $(v_i \otimes 1 \mapsto v'_i)$). En effet on a

$$\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F = \begin{cases} -(\mathrm{id} \otimes F) & \text{sur } \mathbb{C}_\eta \otimes V_{\pm,n} \\ (F \otimes \mathrm{id}) & \text{sur } V_{\pm,n} \otimes \mathbb{C}_\eta. \end{cases}$$

Pour donner les règles de fusion de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ il reste à déterminer la décomposition de $V_n \otimes V_m$ en modules simples.

Proposition 4.1 *On a* $V_n \otimes V_m \simeq V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \cdots \oplus V_{|n-m|}$.

Preuve. Comme la formule est valable dans le cas classique, et que les dimensions des V_n sont les mêmes que dans le cas classique, il suffit de montrer $\supset$, et donc il suffit de trouver un vecteur de plus haut poids q^{n+m-2p} dans $V_n \otimes V_m$, pour tout $p = 0, 1, \ldots, \min(n, m)$.

Soit (v_i), (w_i) des bases de V_n, V_m vérifiant les propriétés de la proposition 3.2. Comme $\Delta(K) = K \otimes K$, les vecteurs $v_i \otimes w_{p-i}$ sont de poids $q^{n-2i} q^{m-2p+2i} = q^{n+m-2p}$ pour tout $p \leq \min(n, m)$ et tout $i \leq p$. En particulier, la combinaison linéaire suivante est encore de poids q^{n+m-2p} :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{p} \alpha_i (v_i \otimes w_{p-i}) \quad \text{avec} \\ \alpha_i &= (-1)^i \ \frac{[m-p+i]_q! [n-i]_q!}{[m-p]_q! [n]_q!} \ q^{-i(m-2p+i+1)}. \end{aligned}$$

Vérifions que x est un vecteur de plus haut poids. On a $\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K$

donc, en utilisant les expressions de E et K dans les bases (v_i), (w_i) :

$$\begin{aligned}E\cdot x = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \Big(& [m-p+i+1]_q\ (v_i \otimes w_{p-i-1}) + \\ & \qquad [n-i+1]_q\ q^{m-2p+2i}\ (v_{i-1}\otimes v_{p-i}) \Big) \\ = & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\ \tfrac{[m-p+i+1]_q![n-i]_q!}{[m-p]_q![n]_q!}\ q^{-i(m-2p+i+1)}\ (v_i \otimes w_{p-i-1}) - \\ & \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1}\ \tfrac{[m-p+i]_q![n-i+1]_q!}{[m-p]_q![n]_q!}\ q^{-(i-1)(m-2p+i)}\ (v_{i-1}\otimes w_{p-i}).\end{aligned}$$

Comme $v_{-1}=0$ et $w_{-1}=0$, les deux sommes sont égales. ■

Proposition 4.2 *On a $V^*_{\pm,n} \simeq V_{\pm,n}$ pour tout (ϵ, n).*

PREUVE. Rappelons que $(x\cdot\phi)(x) = \phi(S(x)v)$ pour tout $x \in U_q$, $\phi \in V^*$, $v \in V$. Soit (v_i) une base de V vérifiant les propriétés de la proposition 3.2 et (ϕ_i) la base duale. Il est immédiat de vérifier que ϕ_n est un vecteur de plus haut poids $\pm q^n$. ■

5 Tressage

Les règles de fusion montrent que $V_{\pm,n}\otimes V_{\pm',m}$ et $V_{\pm',m}\otimes V_{\pm,n}$ sont isomorphes pour tous n, m. Il s'ensuit qu'on a $V\otimes W \simeq W \otimes V$ pour tous modules V, W de dimension finie. Cependant ce n'est pas la volte σ qui réalise l'isomorphisme, car U_q n'est pas cocommutative. On va montrer qu'on peut toutefois réaliser ces isomorphismes par un tressage.

On trouve dans la littérature la formule pour la « R-matrice universelle » suivante, qui induit le tressage de la catégorie des représentations :

$$R = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n_q]!}\ q^{-n(n-1)/2}\ (Y^n \otimes X^n) \Big) \times e^{-\frac{h}{2} H\otimes H}, \tag{4}$$

toujours avec les relations heuristiques $E = X$, $F = Y$, $K = e^{hH}$, $q = e^h$. Mais, outre le fait que cette formule n'a pas de sens dans un cadre purement algébrique, l'élément R vit dans une algèbre « plus grande » que $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, à cause du dernier facteur exponentiel. On adopte ici une autre approche pour montrer que la catégorie des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est tressée — et on montre qu'en fait, seule une sous-catégorie naturelle l'est.

On dit qu'un U_q-module est de type 1 (resp. -1) s'il se décompose en somme de modules simples et de plus haut poids *positifs* (resp. négatifs). Il résulte clairement de la section 4 que les modules de type 1 forment une sous-catégorie monoïdale stricte de la catégorie des U_q-modules de dimension finie.

On fixe pour la suite une racine carrée de q, qu'on utilise pour donner un sens aux puissances de la forme $q^{k/2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 5.1 *Le module $V \otimes W$ est engendré par les vecteurs de la forme $v \otimes w$, où v est un vecteur de plus bas poids et w est un vecteur de plus haut poids.*

PREUVE. On peut supposer que V et W sont simples. En effet, écrivons des décompositions en modules simples : $V = \bigoplus V_i$ et $W = \bigoplus W_j$. On a alors $V \otimes W = \bigoplus V_i \otimes W_j$, or chaque V_i contient des vecteurs de plus bas poids, et chaque W_j, des vecteurs de plus haut poids.

Lorsque V et W sont simples de poids respectifs $\pm q^m$ et $\pm' q^n$, on dispose de bases $(v_i)_{0 \leq i \leq m}$, $(w_j)_{0 \leq j \leq n}$ dans lesquelles E, F, K s'expriment par les formules (3), et on peut supposer $v = v_m$, $w = w_0$. Soit X le sous-module engendré par $v \otimes w$. On a

$$E \cdot (v_p \otimes w) = v_p \otimes Ew + Ev_p \otimes Kw = 0 + q^n [m - p + 1]_q \, v_{p-1} \otimes w,$$

donc $v_p \otimes w \subset X$ pour tout p, par récurrence descendante sur p. Puis on a

$$\begin{aligned} F \cdot (v_p \otimes w_q) &= F v_p \otimes w_q + K^{-1} v_p \otimes F w_q \\ &= [p+1]_q \, v_{p+1} \otimes w_q \ \pm \ q^{m-2p} [q+1]_q \, v_p \otimes w_{q+1}. \end{aligned}$$

Une récurrence sur q montre donc que $\forall p \ v_p \otimes w_q \in X$. ■

La formule (4) appliquée à un vecteur $v \otimes w$, avec v de plus bas poids et w de plus haut poids, se simplifie considérablement : on a en effet $Yv = Xw = 0$ et $(H \otimes H)(v \otimes w) = mn$ si v, w sont de poids q^m, q^n. On est donc amené à la proposition suivante :

Proposition 5.2 *Pour tous U_q-modules V, W de dimension finie et de type 1 il existe un unique isomorphisme $\sigma = \sigma_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes W$ tel que*

$$\sigma(v \otimes w) = q^{-mn/2} (w \otimes v)$$

pour tous vecteurs v de plus bas poids q^m et w de plus haut poids q^n (on a donc $m \leq 0$ et $n \geq 0$). De plus la formule ci-dessus est valable pour tous vecteurs v, w de poids q^m, q^n tels que v est de plus bas poids ou *w est de plus haut poids.*

PREUVE. L'unicité résulte clairement du lemme. Si l'existence est vraie dans $V \otimes W$ et $V' \otimes W$, elle est vraie dans $(V \oplus V') \otimes W$: en effet les vecteurs de plus bas poids de $V \oplus V'$ sont les sommes $v + v'$ de vecteurs de plus bas poids de V et V' *qui ont le même poids.* Ainsi on peut supposer que V et W

sont irréductibles. Mais dans ce cas l'existence est immédiate : en effet les vecteurs v, w sont alors uniques à un scalaire près, et on sait déjà qu'on a $V \otimes W \simeq W \otimes V$ grâce aux règles de fusion.

Pour généraliser la formule au cas ou v n'est pas de plus bas poids, on peut de même supposer que V et W sont irréductibles de poids q^m, q^n et on applique E^p des deux côtés. On a

$$\begin{aligned} &E^p \cdot (v \otimes w) = E^p v \otimes K^p w = q^{pn}(E^p v \otimes w) \quad \text{et} \\ &E^p \cdot (w \otimes v) = w \otimes E^p v, \end{aligned}$$

donc $\sigma(E^p v \otimes w) = (q^{-mn/2}/q^{pn})(w \otimes E^p v) = q^{-(m+2p)n/2}(w \otimes E^p v)$, or $E^p v$ engendre la droite des vecteurs de poids q^{m+2p}. De même pour le cas où w n'est pas de plus haut poids, on applique F^p des deux cotés :

$$\begin{aligned} &F^p \cdot (v \otimes w) = K^{-p} v \otimes F^p w = q^{-pm}(v \otimes F^p w) \quad \text{et} \\ &F^p \cdot (w \otimes v) = v \otimes F^p w, \end{aligned}$$

donc $\sigma(v \otimes F^p w) = (q^{-mn/2}/q^{-pm})(F^p w \otimes v) = q^{-m(n-2p)/2}(F^p w \otimes v)$, or $F^p w$ engendre la droite des vecteurs de poids q^{n-2p}. ■

Proposition 5.3 *Les isomorphismes $\sigma_{V,W}$ ci-dessus définissent un tressage sur la catégorie des U_q-modules de dimension finie et de type* 1.

Preuve. La naturalité des $\sigma_{V,W}$ résulte du fait que les notions de poids sont conservées par morphisme. Plus précisément, soit $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ des morphismes, d'après le lemme 5.1 il suffit de vérifier l'égalité $(g \otimes f)\sigma_{V,W} = \sigma_{V',W'}(f \otimes g)$ sur les vecteurs de la forme $v \otimes w$ avec $v \in V$ de plus bas poids q^m, $w \in W$ de plus haut poids q^n. Posons $v' = f(v)$, $w' = f(w)$, alors v' est un vecteur de plus bas poids q^m, et w' est un vecteur de plus haut poids q^n. Par définition on a donc $\sigma_{V,W}(v \otimes w) = q^{-nm/2}(w \otimes v)$ et $\sigma_{V',W'}(v' \otimes w') = q^{-nm/2}(w' \otimes v')$, et l'égalité à démontrer s'ensuit immédiatement.

Par abus de notation, on omet de noter les morphismes d'associativité de la catégorie des U_q-modules — rappelons que ce sont les morphismes usuels de la catégorie des espaces vectoriels. Les deux axiomes hexagonaux se démontrent de la même manière, traitons le cas du premier, qui correspond à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[r, "\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"] \arrow[dr, "\sigma_{U,V \otimes W}"'] & V \otimes U \otimes W \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{U,W}"] \\ & V \otimes W \otimes U. \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 5.1, il suffit de montrer la commutativité sur les vecteurs de la forme $u \otimes x$, avec $u \in U$ de plus bas poids q^l, $x \in V \otimes W$ de plus haut poids q^p. On a alors $\sigma_{U,V \otimes W}(u \otimes x) = q^{-lp/2}(x \otimes u)$, par définition.

Par ailleurs, il existe clairement une base de $V \otimes W$ formée de vecteurs de la forme $v \otimes w$, où v, w sont vecteurs propres de K. Comme $\Delta(K) = K \otimes K$, les vecteurs v, w qui interviennent dans la décomposition de x dans cette base ont des poids de la forme q^m, q^n avec $m + n = p$. Or on a, pour de tels vecteurs v, w :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id})(u \otimes v \otimes w) &= q^{-lm/2}(\mathrm{id} \otimes \sigma_{U,W})(v \otimes u \otimes w) \\ &= q^{-lm/2} q^{-ln/2}(v \otimes w \otimes u),\end{aligned}$$

car u est un vecteur de plus bas poids, et d'après la proposition 5.2. Il vient donc $(\mathrm{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id})(u \otimes x) = q^{-lp/2}(x \otimes u)$, ce qui conclut la preuve. ■

6 Compléments

Algèbres de Hecke. Tout tressage induit une représentation du monoïde des tresses à n brins sur la famille d'espaces $(V_{f(1)} \otimes \cdots \otimes V_{f(n)})_{f \in S_n}$. En particulier on a pour tout n un morphisme $\mathbb{C}B_n \to \mathrm{End}(V_1^{\otimes n})$. Remarquons que les images σ des générateurs du groupe des tresses dans $\mathrm{End}(V_1 \otimes V_1)$ vérifient des relations additionnelles : en effet on a $\mathrm{End}(V_1 \otimes V_1) = \mathbb{C}\mathrm{id} \oplus \mathbb{C}\sigma$, donc on a nécessairement une identité de la forme $\sigma^2 = a + b\sigma$. Comme application des résultats de la section précédente, calculons a et b.

On note v_+ un vecteur de plus haut poids de V_1, et $v_- = Fv_+$. La proposition 5.2 donne

$$\begin{gathered}\sigma(v_- \otimes v_+) = q^{1/2}(v_+ \otimes v_-), \\ \sigma(v_- \otimes v_-) = q^{-1/2}(v_- \otimes v_-), \quad \sigma(v_+ \otimes v_+) = q^{-1/2}(v_+ \otimes v_+).\end{gathered}$$

On a par ailleurs

$$\begin{gathered}\sigma(F \cdot (v_+ \otimes v_+)) = \sigma(v_- \otimes v_+) + q^{-1}\sigma(v_+ \otimes v_-), \\ F \cdot \sigma(v_+ \otimes v_+) = q^{-1/2} F \cdot (v_+ \otimes v_+) = q^{-1/2}(v_- \otimes v_+) + q^{-3/2}(v_+ \otimes v_-).\end{gathered}$$

Comme σ est un morphisme, on en déduit l'identité

$$\sigma(v_+ \otimes v_-) = q^{-1/2}(q(v_- \otimes v_+) + (1 - q^2)(v_+ \otimes v_-)).$$

On peut alors écrire la matrice de σ dans la base $(v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$:

$$\mathrm{Mat}\ \sigma = q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q^2 & q & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut également calculer :

$$\sigma^2(v_- \otimes v_+) = q^{1/2}\sigma(v_+ \otimes v_-) = q(v_- \otimes v_+) + (1 - q^2)(v_+ \otimes v_-).$$

On a donc $\sigma^2 = q\,\mathrm{id} + (1-q^2)q^{-1/2}\sigma$, d'après le lemme 5.1. Cela s'écrit encore

$$\tau^2 = q^2 + (q^2-1)\tau \quad \text{avec} \quad \tau = -q^{1/2}\sigma.$$

Ainsi le morphisme $\mathbb{C}B_n \to \mathrm{End}(V_1^{\otimes n})$ se factorise à travers l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{n,q^2}$ de type A_{n-1} avec paramètre q^2.

Les calculs précédents permettent également de réaliser V_1 comme son propre dual, en donnant un morphisme de $\mathbb{C}_\epsilon$ dans $V_1 \otimes V_1$. Pour cela il suffit de diagonaliser σ : on trouve la valeur propre 1, de multiplicité 3, et la valeur propre $-q^2$, de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé à $-q^2$ est donc isomorphe à $\mathbb{C}_\epsilon$, il est dirigé par $t_1(1) = (v_- \otimes v_+) - q(v_+ \otimes v_-)$.

On peut en fait montrer que pour tout n, le morphisme $\mathcal{H}_{n,q^2} \to \mathrm{End}(V_1^{\otimes n})$ est un isomorphisme (dualité de Schur-Weil quantique). Cela montre que la catégorie tensorielle des représentations de type 1 est engendrée — en un sens à préciser — par l'objet V_1 et le morphisme $\sigma \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_1)$, ou encore, par l'objet V_1 auto-dual via le morphisme $t_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_\epsilon, V_1 \otimes V_1)$.

Le fait que les vecteurs $(v_- \otimes v_+) - q(v_+ \otimes v_-) \in V_1 \otimes V_1$ et $(v_- \otimes v_+)^* - q(v_+ \otimes v_-)^* \in (V_1 \otimes V_1)^*$ (relativement à la base duale de $(v_\pm \otimes v_\pm)$) soient invariants caractérise $\pm q^{\pm 1}$. En fait ont peut montrer directement qu'on a $U_q(\mathfrak{sl}_2) \simeq U_{q'}(\mathfrak{sl}_2)$ en tant qu'algèbres de Hopf **ssi** $q' = \pm q^{\pm 1}$.

Un résultat négatif. Le tressage construit à la section précédente sur la sous-catégorie des modules de type 1 ne s'étend pas à la catégorie entière. En fait, il n'existe pas de tressage sur la catégorie des U_q-modules de dimension finie.

En effet, supposons qu'on dispose d'un tel tressage σ. Nécessairement $V \simeq \mathbb{C}_\epsilon \otimes V \xrightarrow{\sigma} V \otimes \mathbb{C}_\epsilon \simeq V$ est un multiple de l'identité, autrement dit on a $\sigma(1 \otimes v) = \lambda(v \otimes 1)$ pour un certain $\lambda \neq 0$. L'axiome hexagonal ci-dessous dans $\mathbb{C}_\epsilon \otimes \mathbb{C}_\epsilon \otimes V$, et la naturalité relativement à $\mathbb{C}_\epsilon \otimes \mathbb{C}_\epsilon \simeq \mathbb{C}_\epsilon$, donnent $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda = 1$, pour tout V :

$$\begin{tikzcd} 1\otimes 1\otimes v \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda"'] & 1\otimes v\otimes 1 \arrow[d, "\lambda"] \\ & v\otimes 1\otimes 1. \end{tikzcd}$$

D'autre part l'isomorphisme $V_{-,1} \simeq \mathbb{C}_\eta \otimes V_1 \xrightarrow{\sigma} V_1 \otimes \mathbb{C}_\eta \simeq V_{-,1}$ est également un scalaire, notons-le μ. Si (v_i) est une base de V_1 comme à la proposition 3.2, on a donc $\sigma(1 \otimes v_i) = (-1)^i \mu(v_i \otimes 1)$ pour tout i. L'application d'un des axiomes hexagonaux à $1 \otimes 1 \otimes v_i \in \mathbb{C}_\eta \otimes \mathbb{C}_\eta \otimes V_1$, et la naturalité relativement à $\mathbb{C}_\eta \otimes \mathbb{C}_\eta \simeq \mathbb{C}_\epsilon$, donnent $\mu^2 = 1$:

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes 1 \otimes v_i \arrow[r, "(-1)^i \mu"] \arrow[dr, "1"'] & 1 \otimes v_i \otimes 1 \arrow[d, "(-1)^i \mu"] \\ & v_i \otimes 1 \otimes 1. \end{tikzcd}$$

Enfin, soit w un vecteur directeur de $\mathbb{C}_\epsilon \subset V_1 \otimes V_1$. Comme v_0, v_1 sont de poids respectifs q, q^{-1}, le vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $v_i \otimes v_{1-i}$ avec $i = 0, 1$. L'application de l'autre axiome hexagonal à $1 \otimes x \in \mathbb{C}_\eta \otimes V_1 \otimes V_1$, et la naturalité relativement à $\mathbb{C}_\epsilon \hookrightarrow V_1 \otimes V_1$, donnent $\mu^2 = -1$, donc une contradiction :

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes x \arrow[r] \arrow[drr, "1"'] & 1 \otimes v_i \otimes v_{1-i} \arrow[r, "(-1)^i \mu"] & v_i \otimes 1 \otimes v_{i-1} \arrow[d, "(-1)^{1-i} \mu"] \\ & & x \otimes 1. \end{tikzcd}$$

Une involution sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ Supposons que le paramètre q est un réel positif. Alors, U_q devient une $*$-algèbre de Hopf pour l'involution (antilinéaire, antimultiplicative) définie comme suit sur les générateurs :

$$E^* = KF, \quad F^* = EK^{-1}, \quad K^* = K.$$

Il est en effet immédiat de vérifier que $\mathcal{E} = KF$, $\mathcal{F} = EK^{-1}$ et $\mathcal{K} = K$ vérifient les relations de présentation de $\bar{U}_q^{\mathrm{op}}$ — l'espace vectoriel conjugué munit de la multiplication opposée. Par exemple

$$[\mathcal{F}, \mathcal{E}] = EK^{-1}KF - KFEK^{-1} = EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = \frac{\mathcal{K} - \mathcal{K}^{-1}}{\bar{q} - \bar{q}^{-1}}.$$

De plus tout U_q-module de dimension finie V admet une structure hermitienne invariante, c'est-à-dire pour laquelle on a $(v|Xw) = (X^*v|w)$ pour tous v, $w \in V$ et $X \in U_q$. En effet, il suffit de le montrer pour les modules simples $V_{\pm,n}$. Si (v_i) est une base de $V_{\pm,n}$ comme à la proposition 3.2, on vérifie qu'on peut prendre le produit scalaire qui la rend orthogonale et tel que $\|v_i\|^2 = q^{-i(n-i-1)} \binom{n}{i}_q$ — cette quantité est bien positive si q est positif.

Cela montre que la catégorie des représentations de dimension finie de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, et sa sous-catégorie des représentations de type 1, sont des « W^*-catégories monoïdales concrètes et complètes » avec duaux au sens de Woronowicz. On montre que le groupe quantique compact associé à la catégorie des U_q-modules de type 1 est $SU_q(2)$, pour $q \in]0, 1[$.