Groupes de réflexions complexes quantiques

Roland Vergnioux, Caen, 6 janvier 2009

L'objectif de l'exposé est de présenter des exemples de groupes quantiques compacts qui ne sont pas des q-déformations à la Jimbo-Drinfeld, et de décrire les règles de fusion pour leurs représentations. On obtient des règles de fusion qui ne sont pas celles de groupes compacts, à la différence de ce qui se passe pour les q-déformations.

Notons que les groupes quantiques compacts universels $A_u(n)$, qui sont des « quantifications » (ou « libérations ») de $U(n)$, constituent une telle famille d'exemples. Dans cet exposé on va plutôt partir de groupes finis : les groupes symétriques et certains groupes de réflexions complexes.

Références :

- T. Banica, S.T. Belinschi, M. Capitaine, B. Collins : *Free Bessel Laws*, `arxiv:0710.5931`
- T. Banica, R. V. : *Fusion Rules for Quantum Reflection Groups*, `arxiv:0805.4801`

1 Les groupes quantiques de permutations

Soit $X_n = \{1, \dots, n\}$ et $S_n = \mathrm{Aut}(X_n)$. Identifions S_n au sous-groupe des matrices de permutations dans $GL(n, \mathbb{C})$ et considérons les fonctions

$$a_{ij} : S_n \to \mathbb{C}, \quad \sigma \mapsto \sigma_{ij} = \delta_{i,\sigma j}.$$

Commes les matrices de permutations prennent leurs entrées dans $\{0, 1\}$ et ont exactement une entrée non nulle par ligne et par colonne, on a

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^2 = a_{ij} = a_{ij}^* \\ \sum_k a_{ik} = \sum_k a_{kj} = 1. \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que l'algèbre $A = C(S_n) = \mathbb{C}^{S_n}$ est engendrée par les n^2 éléments $a_{ij} \in A$ et les relations $(*)$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbre involutive unifère commutative.

La structure de groupe de S_n est reflétée au niveau de A par un coproduit $\Delta : C(S_n) = A \to A \otimes A \simeq C(S_n \times S_n)$ défini par la formule $\Delta(f)(\sigma, \tau) = f(\sigma\tau)$. Comme la structure de groupe coïncide avec la multiplication des matrices on a

$$\Delta(a_{ij}) = \textstyle\sum_k a_{ik} \otimes a_{kj}.$$

Définition 1.1 *Le groupe quantique de permutations de n points est donné par la $*$-algèbre (ou la C^*-algèbre) unifère $A_s(n)$ engendrée par n^2 éléments a_{ij} et les relations $(*)$ (sans commutativité), et par le coproduit $\Delta : A \to A \otimes A$, $a_{ij} \mapsto \sum a_{ik} \otimes a_{kj}$.*

On peut se demander en quoi cela définit effectivement un « groupe quantique de permutations ». Remarquons que l'action de S_n sur X_n se traduit par une coaction de $A = C(S_n)$ sur $B = C(X_n) = \mathbb{C}^n$, c'est-à-dire par un morphisme $\delta : B \to B \otimes A$ donné par $\delta(f)(i, \sigma) = f(\sigma i)$. Soit (e_i) la base canonique de B, on a dans notre cas

$$\delta(e_j) = \textstyle\sum_i e_i \otimes a_{ij}.$$

La même formule définit une coaction de $A_s(n)$ sur B. En fait le fait que cette formule définit bien un $*$-morphisme unifère est directement équivalent aux relations $(*)$. Ainsi $(A_s(n), \Delta)$ est le groupe quantique d'automorphismes de l'ensemble à n points :

Proposition 1.2 *La coaction de $A_s(n)$ sur B est universelle parmi les coactions de groupes quantiques compacts sur B. Plus précisément, sur δ' est une autre coaction d'une C^*-algèbre de Woronowicz (A', Δ') sur B, il existe un $*$-morphisme unifère $\pi : A \to A'$ tel que $(\pi \otimes \pi)\Delta = \Delta' \pi$ et $(\mathrm{id} \otimes \pi)\delta = \delta'$.*

Pour que le sens précis de la proposition précédente soit clair, rappelons le cadre axiomatique :

- une C^*-algèbre est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et une algèbre involutive telle que $\|a^*\| = \|a\|$ et $\|a^*a\| = \|a\|^2$ pour tout $a \in A$;
- une C^*-algèbre de Woronowicz est une C^*-algèbre unifère A munie d'un $*$-morphisme unifère $\Delta : A \to A \otimes A$ tel que
  1. $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta : A \to A \otimes A \otimes A$,
  2. $\Delta(A)(1 \otimes A)$ et $\Delta(A)(A \otimes 1)$ sont denses dans $A \otimes A$.
- une coaction d'une C^*-algèbre de Woronowicz A sur une C^*-algèbre unifère B est un $*$-morphisme unifère $\delta : B \to B \otimes A$ tel que
  1. $(\delta \otimes \mathrm{id})\delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\delta : B \to B \otimes A \otimes A$,
  2. $\delta(B)(1 \otimes A)$ est dense dans $B \otimes A$.

Les C^*-algèbres commutatives sont de la forme $C(X)$ où X est un espace localement compact. La C^*-algèbre $C(X)$ est unifère **ssi** X est compact. Les C^*-algèbres de Woronowicz commutatives sont de la forme $C(G)$ avec G un groupe compact et le coproduit $\Delta(f)(g, h) = f(gh)$.

On peut faire les premières remarques suivantes sur $A_s(n)$. Il y a une application quotient évidente qui envoie $A_s(n)$ sur $C(s_n)$, autrement dit « S_n est un sous-groupe du groupe quantique compact S_n^+ associé à $A_s(n)$ ». On dit que $A_s(n)$ est une *libération* de $S(n)$.

Dans les cas $n = 2$, 3, on a en fait $A_s(n) = C(S_n)$, c'est-à-dire que la commutativité résulte automatiquement des relations $(*)$. En revanche dans le cas $n \geq 4$, $A_s(n)$ est de dimension infinie — par exemple on a une application surjective vers $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{pmatrix},$$

où p, q sont les générateurs des deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi le groupe quantique compact S_n^+ des permutations de 4 points est infini !

2 Les groupes de réflexions complexes quantiques

Rappelons qu'une réflexion complexe est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui agit trivialement sur un hyperplan. Un groupe de réflexions complexes est un sous-groupe *fini* de $GL(n,\mathbb{C})$ engendré par des réflexions complexes. Ces groupes sont classifiés : on a 34 cas exceptionnels et une série $G(m,p,n)$ où m, p, n sont des entiers naturels non nuls avec p/m.

Le groupe $G(m,p,n)$ est le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$ formé par les matrices ayant une seule entrée non nulle sur chaque ligne et chaque colonne, et dont les entrées non nulles sont des racines m^{es} de l'unité dont le produit est une racine $(m/p)^{\text{e}}$ de l'unité.

On a $G(1,1,n) = S(n)$. On peut poser la question générale de « quantifier », ou « libérer », tous les groupes de réflexions complexes. Une réponse est apportée dans [BBCC] dans le cas de $H^s(n) := G(s,1,n)$ — ce qui inclut les groupes de Coxeter de type A_n ($s = 1$, groupes symétriques) et $B_n = C_n$ ($s = 2$, groupes hyperoctaédraux). La question générale est encore ouverte.

Définition 2.1 *$A_h^s(n)$, pour s, $n \in \mathbb{N}^*$, est la C^*-algèbre unifère engendrée par n^2 générateurs u_{ij} et les relations suivantes :*

$$(+) \quad \begin{cases} u = (u_{ij}) \quad \textit{et} \quad \bar{u} = (u_{ij}^*) \quad \textit{unitaires}, \\ \textit{les } u_{ij} \textit{ sont des isométries partielles}, \\ \forall i,j \quad u_{ij}^s = u_{ij}^* u_{ij}. \end{cases}$$

C'est une C^*-algèbre de Woronowicz pour le coproduit $\Delta : u_{ij} \mapsto \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$.

Rappelons qu'une isométrie partielle dans une $*$-algèbre est un élément x tel que x^*x et xx^* sont des idempotents — le support initial et le support final de x. Lorsque de plus $x^s = x^*x$ on a automatiquent $x^*x = xx^*$. Dans le cas de $\mathbb{C}$ les tels éléments x sont les racines s^{es} de l'unité, et l'unitarité de u impose qu'une seule entrée par ligne et par colonne peut être non nulle. Autrement dit le quotient commutatif maximal de $A_h^s(n)$ est $C(H^s(n))$, $A_h^s(n)$ est une libération de $H^s(n)$.

Remarquons que si t/s on a une flêche surjective évidente $A_h^s(n) \to A_h^t(n)$ qui envoie les générateurs sur les générateurs. En particulier $A_h^1(n)$ est un quotient de $A_h^s(n)$ pour tout s, et il est facile de voir que $A_h^1(n)$ est isomorphe à $A_s(n)$. En effet quand $s = 1$ les u_{ij} sont simplement des projections ; par ailleurs la matrice (a_{ij}) des générateurs de $A_s(n)$ est unitaire : la relation $\sum_k a_{ik} = 1$ entraîne, sachant que les a_{ij} sont des projections, $a_{ik}a_{il} = 0$ pour $k \neq l$ et on a donc $\sum_i a_{ik}a_{il} = 0$ pour $k \neq l$. En particulier $A_h^s(n)$ est de dimension infinie pour $n \geq 4$.

Le groupe quantique compact associé à $A_h^s(n)$ peut être vu comme un groupe de transformations agissant sur ns points. Donner une coaction de $A_h^s(n)$ sur $B = \mathbb{C}^{ns}$ est équivalent à donner un morphisme $\pi : A_s(ns) \to A_h^s(n)$, soit encore, à donner $(ns)^2$ éléments $A_{ij}^{pq} \in A_h^s(n)$ qui vérifient les relations $(*)$ — ici les indices i, j varient dans $\{1, \dots, n\}$ et p, q, dans $\{1, \dots s\}$. On vérifie que

$$A_{ij}^{pq} = \frac{1}{s} \sum_{r=0}^{s-1} w^{r(p-q)} u_{ij}^r$$

conviennent, où $w = e^{2i\pi/s}$ et u_{ij} sont les générateurs de $A_h^s(n)$. En fait on peut dire beaucoup plus :

Proposition 2.2 *La flèche $A_s(ns) \to A_h^s(n)$ ci-dessus est surjective, et son noyau est engendré par les entrées de la matrice $[a, \Sigma]$, où $a = (a_{ij})$ est la matrice des générateurs de $A_s(ns)$ et Σ est la matrice suivante :*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $A_h^s(n)$ est isomorphe au quotient de $A_s(ns)$ obtenu en demandant que la matrice des générateurs commute à Σ. Or Σ est la matrice d'incidence du graphe formé de n copies disjointes du cycle orienté à s sommets : ainsi $A_h^s(n)$ est le groupe quantique compact de symétries de ce graphe. Notons que $H^s(n)$ est le groupe de symétries « classique » de ce graphe. On en déduit également une présentation de $A_h^s(n)$ à l'aide d'un « produit en couronne libre » : $A_h^s(n) \simeq C(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}) *_w A_s(n)$, qui est l'analogue de l'isomorphisme classique $H^s(n) \simeq \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \wr_n S_n$.

3 Représentations

Il est naturel d'étudier les catégories de représentations des groupes quantiques compacts introduits précédemment. En premier lieu, on cherche à déterminer les règles de fusion.

Dans le contexte quantique, le rôle des représentations est joué par les coreprésentations des C^*-algèbres de Woronowicz. Pour une telle algèbre (A, Δ), une coreprésentation unitaire u sur un espace de Hilbert de dimension finie $H \simeq \mathbb{C}^n$ est un élément unitaire de $L(H) \otimes A \simeq M_n(A)$ tel que $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(u) = u_{12} u_{13} \in L(H) \otimes A \otimes A$, ce qui s'écrit aussi matriciellement $\Delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$.

En particuler les matrices des générateurs de $A_s(n)$ et $A_h^s(n)$ sont des coreprésentations, dites fondamentales, par définition du coproduit. Dans le cas de $A_h^s(n)$ il est facile de vérifier que les matrices $u_k = (u_{ij}^k)$ sont aussi des coreprésentations pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Notons également que $1 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes 1_A$ est toujours une coreprésentation sur $\mathbb{C}$, dite triviale.

Théorème 3.1 *Pour $n \geq 4$ les coreprésentations irréductibles de $A_h^s(n)$ sont indexées par les mots sur $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ de manière à ce que*

$$r_\emptyset = 1, \quad u_k = r_{\bar{k}} \;\; \textit{pour } 1 \leq k < s, \quad u_s = r_{\bar{s}} \oplus r_\emptyset,$$

et de manière à ce qu'on ait les règles de fusion récursives suivantes, où x, y sont des mots et i, j des lettres :

$$r_{xi} \otimes r_{jy} = \begin{cases} r_{xijy} \oplus r_{x(i+j)y} & \textit{si } i+j \neq 0, \\ r_{xijy} \oplus r_{x(i+j)y} \oplus (r_x \otimes r_y) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on voit que les règles de fusion ne sont pas commutatives dès que $s \geq 2$. Pour $s = 1$ on a les règles de fusion de $A_s(n)$ qui sont les même que celles de $SO(3)$.

Idée de la preuve. Modulo des techniques standard dans les anneaux de fusion, il suffit de montrer que la dimension de

$$E(i,j) := \mathrm{Hom}(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_k}, u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_l})$$

est égale à celle prédite par les règles de fusion de l'énoncé. Pour cela on donne une description combinatoire de ces espaces en termes de partitions non-croisées.

Pour deux multi-indices i, j de longueurs k, l à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ notons $NC(i,j)$ l'ensemble des partitions non croisées de la suite de points $(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (k, i_k), (k+1, j_1), \ldots, (k+l, i_l)$. Les points sont ordonnés par leur première coordonnée et on appelle indice d'un point sa deuxième coordonnée.

On introduit le sous-ensemble $NC_s(i,j) \subset NC(i,j)$ des partitions telle que la somme des indices des points dans chaque bloc est nulle modulo s. On démontre alors l'identité

$$(\dagger) \quad \dim E(i,j) = \# NC_s(i,j)$$

et un calcul combinatoire montre que ce sont bien les dimensions prédites par les règles de fusion de l'énoncé.

Plus précisément on démontre $(\dagger)$ de la manière suivante. Pour toute partition $p \in NC(i,j)$ et tous multi-indices α, β de longueurs k, l, remplaçons les indices des points de p par les indices de α, β. On pose $p(\alpha, \beta) = 1$ si les indices obtenus dans chaque bloc de p sont tous égaux, et $p(\alpha, \beta) = 0$ sinon, et on introduit l'application $T_p \in L(\mathbb{C}^{nk}, \mathbb{C}^{nl})$ dont la matrice dans la base canonique est $(p(\alpha, \beta))$. Alors le point principal de l'étude est de montrer que

$$E(i,j) = \mathrm{Vect}\{T_p \mid p \in NC_s(i,j)\}.$$

Finalement on conclut grâce à l'indépendance linéaire des applications T_p quand p varie dans $NC(i,j)$, qui est vérifiée pour $n \geq 4$ et provient de la théorie des algèbres de Temperly-Lieb.