K-théorie des groupes quantiques libres unitaires

Roland Vergnioux

travail en commun avec

Christian Voigt

Université de Caen Basse-Normandie
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Paris, 12 janvier 2012

Plan

Le résultat principal

Soit $n \geq 2$ et $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. On considère les C^*-algèbres unifères suivantes, définies par n^2 générateurs u_{ij} formant une matrice u, et les relations

$$A_u(Q) = \langle u_{ij} \mid u \text{ et } Q\bar{u}Q^{-1} \text{ unitaires}\rangle,$$
$$A_o(Q) = \langle u_{ij} \mid u \text{ unitaire et } u = Q\bar{u}Q^{-1}\rangle.$$

On les interprète comme C^*-algèbres maximales associées à des groupes quantiques discrets : $A_u(Q) = C^*(\mathbb{F}U(Q))$, $A_o(Q) = C^*(\mathbb{F}O(Q))$.

Théorème

Le groupe quantique discret $\mathbb{F}U(Q)$ vérifie la propriété de Baum-Connes forte (relativement au sous-groupe trivial). On a

$$K_0(A_u(Q)) = \mathbb{Z}[1] \quad \text{et} \quad K_1(A_u(Q)) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[\bar{u}].$$

Stratégie

- Si $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$ on a $\mathbb{F}U(Q) \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{F}O(Q)$ [Banica 1997].
- $\mathbb{F}O(Q)$ vérifie BC forte [Voigt 2009].
- Prop. : BC forte est stable par passage aux sous-groupes divisibles.
- Théorème : BC forte est stable par passage aux produits libres.
- Cas $Q\bar{Q} \notin \mathbb{C}I_n$: équivalence monoïdale [Bichon-De Rijdt-Vaes 2006].

Autre approche possible : utiliser la propriété de Haagerup [Brannan 2011].

Résultat sur les produits libres :

- Cas classique : pour les groupes agissant sur les arbres [Baum-Connes-Higson 1994], [Oyono-oyono 1998], [Tu 1998]
- Cas quantique : utilise l'arbre de Bass-Serre quantique et l'élément de Julg-Valette associé [V. 2004]

Stratégie

Résultat sur les produits libres :

- Cas classique : pour les groupes agissant sur les arbres [Baum-Connes-Higson 1994], [Oyono-oyono 1998], [Tu 1998]
- Cas quantique : utilise l'arbre de Bass-Serre quantique et l'élément de Julg-Valette associé [V. 2004]

Nouveautés :

- C^*-algèbre $\mathscr{P}$ associée à l'arbre de Bass-Serre quantique [Julg-Valette 1989] et [Kasparov-Skandalis 1991]
- Inversibilité de l'élément Dirac associé sans le « rotation trick »
- Actions du double de Drinfel'd $D(\mathbb{F}U(Q))$ pour pouvoir faire des produits tensoriels

Plan

Groupes quantiques discrets

Un groupe quantique discret $\mathbb{\Gamma}$ peut être donné par :

- une C^*-algèbre $C_0(\mathbb{\Gamma})$ avec coproduit,
- une C^*-algèbre $C^*(\mathbb{\Gamma})$ avec coproduit,
- une catégorie de coreprésentations $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, ...

Cas classique : $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ « vrai » groupe discret $\iff C_0(\mathbb{\Gamma})$ commutative.
Alors $\mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma} = \Gamma$.

Dans le cas général $C_0(\mathbb{\Gamma})$ est une somme d'algèbres de matrices :

$$C_0(\mathbb{\Gamma}) = \bigoplus\{L(H_r) \mid r \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}\}.$$

On note p_r les projections centrales minimales correspondantes.
$\ell^2(\mathbb{\Gamma})$: construction GNS de l'état de Haar $h : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$.

Sous-groupes quantiques et quotient

Plusieurs manières de donner $\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$:

- sous-C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable $C^*(\mathbb{\Lambda}) \subset C^*(\mathbb{\Gamma})$
  Espérance conditionnelle $E : C^*(\mathbb{\Gamma}) \twoheadrightarrow C^*(\mathbb{\Lambda})$
- sous-catégorie pleine $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Lambda} \subset \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$,
  contenant 1, stable par $\otimes$ et dualité [V. 2004]
- morphisme surj. $\pi : C_0(\mathbb{\Gamma}) \to C_0(\mathbb{\Lambda})$ compatible avec les coproduits
  [Vaes 2005] dans le cadre localement compact

Espace quotient :

- $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \{f \in M(C_0(\mathbb{\Gamma})) \mid (\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta(f) = f\otimes 1\}$
  avec coaction de $C_0(\mathbb{\Gamma})$
- $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ construction GNS de $\varepsilon_{\mathbb{\Lambda}} \circ E : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$
- $\mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda} = \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\sim$,
  où $r \sim s$ si $r \subset s \otimes t$ avec $t \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Lambda}$

Résultats sur $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$

Pour tout $\alpha \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$, on pose $p_\alpha = \sum_{r\in\alpha} p_r \in M(C_0(\mathbb{\Gamma}))$.

Proposition

On a $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \bigoplus p_\alpha C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ avec $\dim p_\alpha C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) < \infty$.

La représentation de $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \subset M(C_0(\mathbb{\Gamma}))$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ se factorise en une représentation fidèle sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Enfin on a une action du double de Drinfel'd $D(\mathbb{\Gamma})$ sur $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$:

Proposition

La représentation adjointe de $C_0(\mathbb{\Gamma})$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ se factorise en une représentation sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.
Par ailleurs $C^*(\mathbb{\Gamma})$ agit sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ via la représentation GNS.

Sous-groupes divisibles

$\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$ est « divisible » si l'une des conditions équiv. suivantes est vérifiée :

- Il existe un isomorphisme $\mathbb{\Lambda}$-équivariant $C_0(\mathbb{\Gamma}) \simeq C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \otimes C_0(\mathbb{\Lambda})$.
- Il existe un isomorphisme $\mathbb{\Lambda}$-équivariant $C_0(\mathbb{\Gamma}) \simeq C_0(\mathbb{\Lambda}) \otimes C_0(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$.
- Pour tout $\alpha \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$ il existe $r \in \alpha$ tel que $r \otimes t$ est irréductible pour tout $t \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Lambda}$.

Exemples :

- Tout sous-groupe de $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ est divisible.
- Proposition : $\mathbb{\Gamma}_0 \subset \mathbb{\Gamma}_0 * \mathbb{\Gamma}_1$ est divisible.
- Proposition : $\mathbb{F}U(Q) \subset \mathbb{Z} * \mathbb{F}O(Q)$ est divisible.
- $\mathbb{F}O(Q)^{ev} \subset \mathbb{F}O(Q)$ n'est pas divisible.

Proposition

Si $\mathbb{\Gamma}$ vérifie BC forte et $\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$ est divisible, alors $\mathbb{\Lambda}$ vérifie BC forte.

Plan

L'arbre de Bass-Serre quantique

$\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_1$ groupes quantiques discrets : $C_0(\mathbb{F}_i)$, $\ell^2(\mathbb{F}_i)$, $C^*(\mathbb{F}_i)$.

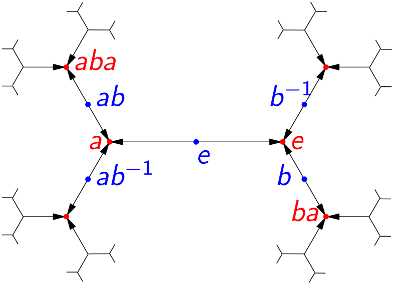
Produit libre : $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$ donné par $C^*(\mathbb{F}) = C^*(\mathbb{F}_i) * C^*(\mathbb{F}_i)$.
On a « $\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F} = \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}_0 * \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}_1$ ».

Arbre de Bass-Serre classique X
(arêtes orientées, une seule arête par paire de sommets adjacents)

- espace des sommets : $X^{(0)} = (\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}/\mathbb{F}_0) \sqcup (\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}/\mathbb{F}_1)$
- espace des arêtes : $X^{(1)} = \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}$
- applications but et source :
  $\tau_i : \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F} \to \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{F}/\mathbb{F}_i$ surjections canoniques

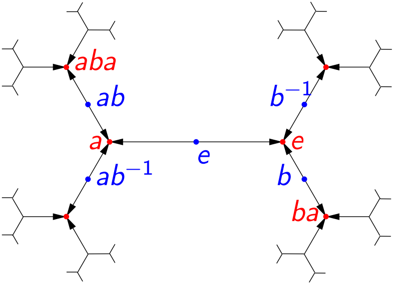
Dans ce cas $p_\alpha C_b(\mathbb{F}/\mathbb{F}_i) \simeq L(K_\alpha)$.
On pose $\dim \alpha = \dim K_\alpha$ et $\rho_i(r) = \dim r / \dim \tau_i(r) \in \mathbb{N}^*$.

Un exemple classique



$$\boxed{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a, b \rangle}$$

Un exemple classique



$$\boxed{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \widehat{\mathfrak{S}}_3}$$

L'arbre de Bass-Serre quantique

$\mathbb{\Gamma}_0$, $\mathbb{\Gamma}_1$ groupes quantiques discrets : $C_0(\mathbb{\Gamma}_i)$, $\ell^2(\mathbb{\Gamma}_i)$, $C^*(\mathbb{\Gamma}_i)$.

Produit libre : $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 * \mathbb{\Gamma}_1$ donné par $C^*(\mathbb{\Gamma}) = C^*(\mathbb{\Gamma}_i) * C^*(\mathbb{\Gamma}_i)$.
On a « $\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_0 * \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_1$ ».

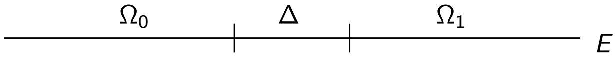
Arbre de Bass-Serre quantique $\mathbb{X}$

- espace des sommets : $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_0) \oplus \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_1)$,
  $C_0(\mathbb{X}^{(0)}) = C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_0) \oplus C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_1)$
- espace des arêtes : $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma})$, $C_0(\mathbb{X}^{(1)}) = C_0(\mathbb{\Gamma})$
- opérateurs but et source : $T_i : \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \to \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)$ non bornés
  $T_i f$ est borné pour tout $f \in C_c(\mathbb{\Gamma}) \subset K(\ell^2(\mathbb{\Gamma}))$.

Les espaces ℓ^2 sont munis d'actions naturelles de $D(\mathbb{\Gamma})$, les opérateurs T_i sont des entrelaceurs.

Élément Dirac

On pose $\ell^2(\mathbb{X}) = \ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) \oplus \ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ et on considère la droite affine



Algèbre de Kasparov-Skandalis $\mathscr{P} \subset C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$
Sous-espace fermé engendré par $C_c(\mathbb{\Gamma})$, $C_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_0)$, $C_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_1)$, T_0 et T_1, avec conditions de support sur E :

- $C_c(E) \otimes C_c(\mathbb{\Gamma})$, $C_c(\Omega_i) \otimes C_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)$,
- $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\mathbb{\Gamma}))$, $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\mathbb{\Gamma}))^*$, $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\mathbb{\Gamma}))(T_i C_c(\mathbb{\Gamma}))^*$.

Proposition

L'action naturelle de $D(\mathbb{\Gamma})$ sur $C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$ se restreint à $\mathscr{P}$.

Élément Dirac

Algèbre de Kasparov-Skandalis $\mathscr{P} \subset C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$
Sous-espace fermé engendré par $C_c(\Gamma)$, $C_c(\Gamma/\Gamma_0)$, $C_c(\Gamma/\Gamma_1)$, T_0 et T_1, avec conditions de support sur E :

- $C_c(E) \otimes C_c(\Gamma)$, $C_c(\Omega_i) \otimes C_c(\Gamma/\Gamma_i)$,
- $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\Gamma))$, $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\Gamma))^*$, $C_c(\Omega_i) \otimes (T_i C_c(\Gamma))(T_i C_c(\Gamma))^*$.

Proposition

L'action naturelle de $D(\Gamma)$ sur $C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$ se restreint à $\mathscr{P}$.

L'inclusion $\Sigma\mathscr{P} \subset \Sigma C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$, composée avec l'isomorphisme de Bott et l'équivalence de Morita équivariante $K(\ell^2(\mathbb{X})) \sim_M \mathbb{C}$, définit l'élément de Dirac $D \in KK^{D(\Gamma)}(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

Éléments Gamma et dual-Dirac

Ensemble des mots $r \in \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_0 * \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_1$ finissant dans $\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_i$ ➔ projection centrale $q_i = \sum p_r \in M(C_0(\mathbb{\Gamma}))$

$$F = T_1 q_0 + T_0(1 - q_0) : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$$

C'est une isométrie de co-rang 1, commute à l'action de $D(\mathbb{\Gamma})$ modulo les compacts ➔ élément $\gamma \in KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Théorème (V. 2004, V.-Voigt)

On a $\gamma = 1$ dans $KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Éléments Gamma et dual-Dirac

Ensemble des mots $r \in \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_0 * \mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_1$ finissant dans $\mathrm{Irr\,Corep}\,\mathbb{\Gamma}_i$ ➔ projection centrale $q_i = \sum p_r \in M(C_0(\mathbb{\Gamma}))$

$$F = T_1 q_0 + T_0(1 - q_0) : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$$

Théorème (V. 2004, V.-Voigt)

On a $\gamma = 1$ dans $KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

L'opérateur F provient de T_0, T_1 et de $q_0 \in M(C_0(\mathbb{X}^{(1)}))$
➔ $\gamma \otimes [\beta] \in KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \Sigma C_0(E))$ peut être représenté par $G_0 \in M(\Sigma C_0(E) \otimes K(\ell^2(\mathbb{X})))$ homotope à $G_1 \in M(\Sigma \mathscr{P})$.

Proposition

L'opérateur $G_1 \in L(\Sigma C_0(E) \otimes \ell^2(\mathbb{X}))$ définit un élément $\eta \in KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \Sigma \mathscr{P})$ tel que $\eta \otimes_{\Sigma \mathscr{P}} D = \gamma$.

Inversibilité de D dans KK

Proposition

D est inversible comme élément de $KK(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

On sait déjà que D induit un morphisme surjectif sur K_*.
Via le TCU, il suffit de montrer que $K_*(\Sigma\mathscr{P}) = K_*(\mathbb{C})$. On a

$$0 \longrightarrow I_0 \oplus I_1 \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow C(\Delta, C_0(\Gamma)) \longrightarrow 0$$

où I_i est l'adhérence de $C_0(\Omega_i) \otimes \begin{pmatrix} C_c(\Gamma/\Gamma_i) & T_i C_c(\Gamma) \\ (T_i C_c(\Gamma))^* & — \end{pmatrix}$.

Inversibilité de D dans KK

Proposition

D est inversible comme élément de $KK(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

On sait déjà que D induit un morphisme surjectif sur K_*.
Via le TCU, il suffit de montrer que $K_*(\Sigma\mathscr{P}) = K_*(\mathbb{C})$. On a

$$0 \longrightarrow I_0 \oplus I_1 \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow C(\Delta, C_0(\mathbb{\Gamma})) \longrightarrow 0$$

où I_i est Morita-équivalent à $\Sigma C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)$.

Inversibilité de D dans KK

Proposition

D est inversible comme élément de $KK(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

On sait déjà que D induit un morphisme surjectif sur K_*.
Via le TCU, il suffit de montrer que $K_*(\Sigma\mathscr{P}) = K_*(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{array}{ccccc} \oplus K_1(C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)) & \longrightarrow & K_0(\mathscr{P}) & \longrightarrow & K_0(C_0(\mathbb{\Gamma})) \\ \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ K_1(C_0(\mathbb{\Gamma})) & \longleftarrow & K_1(\mathscr{P}) & \longleftarrow & \oplus K_0(C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)) \end{array}$$

Inversibilité de D dans KK

Proposition

D est inversible comme élément de $KK(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

On sait déjà que D induit un morphisme surjectif sur K_*.
Via le TCU, il suffit de montrer que $K_*(\Sigma\mathscr{P}) = K_*(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(\mathscr{P}) & \longrightarrow & \oplus\mathbb{Z}[r] \\ \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ 0 & \longleftarrow & K_1(\mathscr{P}) & \longleftarrow & \oplus\mathbb{Z}[\alpha] \end{array}$$

avec $r \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, $\alpha \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_0 \sqcup \mathrm{Irr}\,\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i$.

Inversibilité de D dans KK

Proposition

D est inversible comme élément de $KK(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$.

On sait déjà que D induit un morphisme surjectif sur K_*.
Via le TCU, il suffit de montrer que $K_*(\Sigma\mathscr{P}) = K_*(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(\mathscr{P}) & \longrightarrow & \oplus\mathbb{Z}[r] \\ \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ 0 & \longleftarrow & K_1(\mathscr{P}) & \longleftarrow & \oplus\mathbb{Z}[\alpha] \end{array}$$

avec $r \in X^{(1)}$, $\alpha \in X^{(0)}$ et $\partial([r]) = \rho_1(r)[\tau_1(r)] - \rho_0(r)[\tau_0(r)]$.
Comme le graphe classique est un arbre, $\ker \partial = 0$ et $\operatorname{coker} \partial \simeq \mathbb{Z}$.

Conjecture de Baum-Connes (1)

Catégorie $KK^{\mathbb{\Gamma}}$: $\mathbb{\Gamma}$-C^*-algèbres + groupes $KK^{\mathbb{\Gamma}}(A, B)$
« Bonne classe de triangles » : diagrammes $\Sigma Q \to K \to E \to Q$
isomorphes à des diagrammes de cônes $\Sigma B \to C_f \to A \xrightarrow[f]{} B$
Exemple : $Q = E/K$ avec section CCP équivariante

Deux sous-catégories :

$$TI_{\mathbb{\Gamma}} = \{\mathrm{ind}_E^{\mathbb{\Gamma}}(A) \mid A \in KK\}, \quad TC_{\mathbb{\Gamma}} = \{A \in KK^{\mathbb{\Gamma}} \mid \forall B \;\; KK(A, B) = 0\}.$$

$\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$: sous-catégorie localisante engendrée
(complétion des triangles, facteurs directs).

Definition (Meyer-Nest)

Propriété de Baum-Connes forte relativement à TI : $\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle = KK^{\mathbb{\Gamma}}$.

Si $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ sans torsion : correspond à l'existence d'élément γ avec $\gamma = 1$.

Stabilité par produit libre

Théorème

Si Γ_0, Γ_1 vérifient la propriété de BC forte relativement à TI, c'est aussi le cas de $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1$.

$\mathscr{P}$ est dans $\langle TI_\Gamma \rangle$ car on a l'extension semi-scindée

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_0 \oplus I_1 & \longrightarrow & \mathscr{P} & \longrightarrow & C(\Delta, C_0(\Gamma)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\!\mid & & & & \wr\!\mid & & \\ & & \Sigma C_0(\Gamma/\Gamma_0) \oplus \Sigma C_0(\Gamma/\Gamma_1) & & & & C_0(\Gamma) & & \end{array}$$

Stabilité par produit libre

Théorème

Si Γ_0, Γ_1 vérifient la propriété de BC forte relativement à TI, c'est aussi le cas de $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1$.

$\mathscr{P}$ est dans $\langle TI_\Gamma \rangle$ car on a l'extension semi-scindée

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_0 \oplus I_1 & \longrightarrow & \mathscr{P} & \longrightarrow & C(\Delta, C_0(\Gamma)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\! \mid & & & & \wr\! \mid & & \\ & & \Sigma\,\mathrm{ind}_{\Gamma_1}^{\Gamma}(\mathbb{C}) \oplus \Sigma\,\mathrm{ind}_{\Gamma_0}^{\Gamma}(\mathbb{C}) & & & & \mathrm{ind}_{E}^{\Gamma}(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

et $\mathrm{ind}_{\Gamma_i}^{\Gamma}(\mathbb{C}) \in \mathrm{ind}_{\Gamma_i}^{\Gamma}(\langle TI_{\Gamma_i} \rangle) \subset \langle TI_\Gamma \rangle$ par hypothèse.

Stabilité par produit libre

Théorème

Si $\mathbb{\Gamma}_0$, $\mathbb{\Gamma}_1$ vérifient la propriété de BC forte relativement à TI, c'est aussi le cas de $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 * \mathbb{\Gamma}_1$.

On montre l'inversibilité de $\cdot \otimes D : KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathscr{P}, \mathscr{P}) \to KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathscr{P}, \mathbb{C})$ grâce à

- la suite exacte précédente pour $\mathscr{P}$,
- les isomorphismes naturels $KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{\Gamma}_i}^{\mathbb{\Gamma}}(A), B) \simeq KK^{\mathbb{\Gamma}_i}(A, B)$,
- l'hypothèse : toute $A \in KK^{\mathbb{\Gamma}_i}$ « est » induite du sous-groupe trivial.

On se ramène ainsi à l'inversibilité de D dans KK. On obtient $\mathbb{C} \in \langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$, et en fait $\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle = KK^{\mathbb{\Gamma}}$ en faisant des produits tensoriels.

Il faut en fait l'inversibilité de D dans $KK^{\hat{\mathbb{\Gamma}}}$.

Plan

Conjecture de Baum-Connes (2)

Toute $A \in KK^{\mathbb{\Gamma}}$ a une « approximation » $\tilde{A} \to A$ avec $\tilde{A} \in \langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$, fonctorielle et unique à isomorphisme près, qui s'insère dans un triangle

$$\Sigma N \to A' \to A \to N$$

avec $N \in TC_{\mathbb{\Gamma}}$ [Meyer-Nest]. Si $\mathbb{\Gamma}$ vérifie BC forte, $\tilde{A} \simeq A$.

Application d'assemblage à coefficients dans A :

$$\mu_A : K_*(\tilde{A} \rtimes \mathbb{\Gamma}) \to K_*(A \rtimes \mathbb{\Gamma}).$$

Si Γ vérifie BC forte, μ_A est un isomorphisme.

Résolution T-projective de $A \in KK^{\mathbb{\Gamma}}$: complexe

$$\cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

avec C_i facteurs directs d'éléments de TI et telle que

$$\cdots \longrightarrow KK(X, C_1) \longrightarrow KK(X, C_0) \longrightarrow KK(X, A) \longrightarrow 0$$

est exacte pour toute X.

Conjecture de Baum-Connes (2)

Résolution T-projective de $A \in KK^\Gamma$: complexe

$$\cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

avec C_i facteurs directs d'éléments de TI et telle que

$$\cdots \longrightarrow KK(X, C_1) \longrightarrow KK(X, C_0) \longrightarrow KK(X, A) \longrightarrow 0$$

est exacte pour toute X.

Une résolution T-projective induit une suite spectrale qui « calcule » $K_*(\tilde{A} \rtimes \Gamma)$, donc $K_*(A \rtimes \Gamma)$ si BC forte est vérifiée. Dans le cas de longueur 1, on a plus simplement une suite exacte cyclique :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0 \rtimes \Gamma) & \to & K_0(\tilde{A} \rtimes \Gamma) & \to & K_1(C_1 \rtimes \Gamma) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(C_1 \rtimes \Gamma) & \leftarrow & K_1(\tilde{A} \rtimes \Gamma) & \leftarrow & K_0(C_0 \rtimes \Gamma). \end{array}$$

Calcul de $K_*(A_u(Q))$

Proposition

On a $K_0(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}$ *et* $K_1(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}^2$.

On construit dans $KK^{\mathbb{F}}$ une résolution de $\mathbb{C}$ de la forme

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{F})^2 \longrightarrow C_0(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

$C_0(\mathbb{F}) = \mathrm{ind}_E^{\mathbb{F}}(\mathbb{C})$ est bien dans $TI_{\mathbb{F}}$.

On a $K_*(C_0(\mathbb{F})) = \bigoplus \mathbb{Z}[r] = R(\mathbb{F})$, anneau des coreprésentations de $\mathbb{F}$.

Suite induite en K-théorie :

$$0 \longrightarrow R(\mathbb{F})^2 \xrightarrow{b} R(\mathbb{F}) \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

exacte pour $b(v,w) = v(\bar{u} - n) + w(u - n)$ et $d(v) = \dim v$.

b et d se relèvent dans $KK^{\mathbb{F}}$ → résolution T-projective.

Calcul de $K_*(A_u(Q))$

Proposition

On a $K_0(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}$ *et* $K_1(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}^2$.

On obtient la suite exacte cyclique suivante

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(\mathbb{\Gamma}) \rtimes \mathbb{\Gamma}) & \rightarrow & K_0(\tilde{\mathbb{C}} \rtimes \mathbb{\Gamma}) & \rightarrow & K_1(C_0(\mathbb{\Gamma})^2 \rtimes \mathbb{\Gamma}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(C_0(\mathbb{\Gamma})^2 \rtimes \mathbb{\Gamma}) & \leftarrow & K_1(\tilde{\mathbb{C}} \rtimes \mathbb{\Gamma}) & \leftarrow & K_1(C_0(\mathbb{\Gamma}) \rtimes \mathbb{\Gamma}). \end{array}$$

Or $C_0(\mathbb{\Gamma}) \rtimes \mathbb{\Gamma} \simeq K(\ell^2(\mathbb{\Gamma}))$, et $\tilde{\mathbb{C}} \rtimes \mathbb{\Gamma} \simeq C^*(\mathbb{\Gamma})$ par BC.

Calcul de $K_*(A_u(Q))$

Proposition

On a $K_0(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}$ *et* $K_1(A_u(Q)) \simeq \mathbb{Z}^2$.

On obtient la suite exacte cyclique suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & K_0(C^*(\Gamma)) & \rightarrow & 0 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \leftarrow & K_1(C^*(\Gamma)) & \leftarrow & 0. \end{array}$$