Sur la représentation adjointe des groupes quantiques libres orthogonaux

Roland Vergnioux
travail en commun avec Pierre Fima

Normandie Université
Université Paris Diderot

Caen, 8 octobre 2013

Plan de l'exposé

Les groupes quantiques libres orthogonaux

On considère les C^*-algèbres unifères définies par générateurs et relations :

$$C_o(n) = \langle u_i, 1 \leq i \leq n \mid u_i = u_i^*, \quad u_i \ \text{ unitary}\rangle,$$
$$A_o(n) = \langle u_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid u_{ij} = u_{ij}^*, \quad (u_{ij}) \ \text{ unitary}\rangle.$$

On reconnaît $C_o(n) = C^*(FO_n)$ avec $FO_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*n}$.
On pose $A_o(n) = C^*(\mathbb{F}O_n)$. $A_o(n)$ a été introduite par S. Wang.

Pour reconstruire FO_n on a besoin du coproduit

$$\Delta : C_o(n) \to C_o(n) \otimes C_o(n),\ u_i \mapsto u_i \otimes u_i.$$

De même il y a un coproduit naturel

$$\Delta : A_o(n) \to A_o(n) \otimes A_o(n),\ u_{ij} \mapsto \textstyle\sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

→ $\mathbb{F}O_n$ est un groupe quantique discret, le groupe quantique libre orthogonal. C'est le dual de Pontrjagin du groupe quantique compact O_n^+.

Groupes quantiques discrets

Une C^*-algèbre de Woronowicz est une C^*-algèbre unifère A munie d'un $*$-homomorphisme $\Delta : A \to A \otimes A$ (coproduit) tel que

- $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
- $\Delta(A)(1 \otimes A)$ et $\Delta(A)(A \otimes 1)$ sont denses dans $A \otimes A$.

Exemples :

- G groupe compact, $A = C(G)$, $\Delta(f) = ((x,y) \mapsto f(xy))$, caractérisé par la commutativité de A ;
- Γ groupe discret, $A = C^*(\Gamma)$, $\Delta(g) = g \otimes g$ — mais aussi $A = C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$, caractérisés par la co-commutativité : $\Sigma\Delta = \Delta$.

Notation : $A = C^*(\mathbb{\Gamma})$.

Groupes quantiques discrets

Une C^*-algèbre de Woronowicz est une C^*-algèbre unifère A munie d'un $*$-homomorphisme $\Delta : A \to A \otimes A$ (coproduit) tel que

- $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
- $\Delta(A)(1 \otimes A)$ et $\Delta(A)(A \otimes 1)$ sont denses dans $A \otimes A$.

Théorie générale :

- État de Haar $h \in C^*(\mathbb{\Gamma})^*$ ➞ représentation GNS $\lambda : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$,
- $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{\Gamma}) = \lambda(C^*(\mathbb{\Gamma}))$ est aussi une C^*-algèbre de Woronowicz,
- $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{\Gamma})''$ algèbre de von Neumann de $\mathbb{\Gamma}$,
- représentation régulière droite $\rho : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$,
- représentation adjointe $\mathrm{ad} = (\lambda, \rho) \circ \Delta : C^*_{\max}(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$,
- représentation triviale $\epsilon : C^*_{\max}(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$,

$\mathbb{\Gamma}$ est unimodulaire si h est tracial, moyennable si ϵ se factorise à travers λ.

Analogies avec les C^*-algèbres de groupes libres

$\mathbb{F}O_n$ partage de nombreuses propriétés avec les groupes libres usuels :

- $\mathbb{F}O_n$ est non moyennable pour $n \geq 3$ [Banica 1997] ;
- $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$ est simple, $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est un facteur plein [Vaes-V. 2005] ;
- $\mathbb{F}O_n$ est K-moyennable [Voigt 2009] ;
- $\mathbb{F}O_n$ est a-T-moyennable [Brannan 2011] ;
- plus loin dans cet exposé : décroissance rapide, moyennabilité faible, bi-exactitude, ...

Cependant : le premier nombre de Betti ℓ^2 de $\mathbb{F}O_n$ est nul [V. 2009]. Plus précisément, il n'y a pas de cocycle non trivial dans la régulière.

Objectif de l'exposé : construire un cocycle propre dans une représentation faiblement contenue dans la régulière.

Plan de l'exposé

La déformation

Action de O_n

Par définition on a une application surjective

$$\pi : C^*(\mathbb{F}O_n) = C(O_n^+) \to C(O_n).$$

Par le principe d'absorption de Fell, Δ se factorise en

$$\Delta' : C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n) \to C^*(\mathbb{F}O_n) \otimes C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n).$$

On obtient une action de O_n sur $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$ par automorphismes :

$$\alpha_g = ((ev_g \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta' : C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n) \to C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n).$$

Déformation de $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$ dans une algèbre plus grande

Posons $C = C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$ et $\tilde{C} = C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n) \otimes C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$

$\iota = \Delta_{\mathrm{red}} : C \to \tilde{C}$ plongement « naturel »

$E : \tilde{C} \to \iota(C)$ unique esp. cond. préservant la trace

On déforme ι en posant $A_g(x) = (\mathrm{id} \otimes \alpha_g)\iota : C \to \tilde{C}$ pour $g \in O_n$.

A-T-moyennabilité

Notion de « longueur des mots » sur $\mathbb{F}O_n$: $\ell^2\mathbb{F}O_n = \bigoplus p_k \ell^2\mathbb{F}O_n$.
Définition : $\bigoplus_{l\leq k} p_l \ell^2\mathbb{F}O_n = \mathrm{Span}\{\Lambda_h(P(u_{ij})) \mid \deg P \leq k\}$.

On note U_k les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

Proposition (Fima-V.)

On a $E \circ A_g = T_t : C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n) \to C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}O_n)$, où $t = \mathrm{Tr}(g)$ et

$$\Lambda_h(T_t(x)) = \sum_k \frac{U_k(t/2)}{U_k(n/2)}\, p_k \Lambda_h(x).$$

Corollaire (Brannan 2011)

Les applications T_t sont complètement positives.
$\mathbb{F}O_n$ est a-T-moyennable.

Un cocycle propre

Rappel : a-T-moyennabilité $\Leftrightarrow$ cocycle propre dans une certaine repr. π.

Cas classique : F_n, groupe libre à n générateurs.
On a cocycle propre naturel donné par les chemins vers l'origine dans le graphe de Cayley. Dans ce cas $\pi = \bigoplus_{2n} \lambda$.

Théorème (V. 2009)

Pour $n \geq 3$ il existe un unique « cocycle chemin » dans le graphe de Cayley quantique de $\mathbb{F}O_n$. De plus ce cocycle est trivial.

Corollaire (V. 2009)

On a $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{F}O_n], \ell^2(\mathbb{F}O_n)) = 0$.

$\rightarrow$ pas de cocycle propre dans la régulière.

Un cocycle propre

Construction d'un cocycle propre explicite pour $\mathbb{F}O_n$

Dérivation de la déformation A_g : pour tout $X \in \mathfrak{o}_n$ on obtient

- une dérivation $\delta_X : \mathbb{C}[\mathbb{F}O_n] \to \tilde{C} \ominus \iota(C)$
- un cocycle $c_X : \mathbb{C}[\mathbb{F}O_n] \to \ell^2(\mathbb{F}O_n) \ominus \mathbb{C}\xi_0$

Proposition (Fima-V.)

Pour tout $X \in \mathfrak{o}_n$, $X \neq 0$, c_X est propre.

- a-T-moyennabilité réalisée par un cocycle dans $\pi = \mathrm{ad} \ominus \epsilon$:

Proposition (Fima-V.)

La représentation de $\mathbb{F}O_n$ correspondant au bimodule ${}_{\iota(C)}\tilde{C}_{\iota(C)}$ est la représentation adjointe.

Plan de l'exposé

Résultats classiques

On note $\ell(g)$ la longueur de $g \in F_n$.

Rappel des principaux résultats de **[Haagerup 1979]** :

- décroissance rapide : pour $x \in C^*(F_n)$ à support dans les éléments de longueur k, $\|\lambda(x)\| \leq (k+1)\|x\|_2$, où $\|x\|_2^2 = h(x^*x)$.
- a-T-moyennabilité : $(g \mapsto e^{-t\ell(g)}g)$ définit une application complètement positive $T_t : C^*_{\mathrm{red}}(F_n) \to C^*_{\mathrm{red}}(F_n)$ pour tout $t > 0$.

Corollaires :

- propriété d'approximation métrique (MAP) pour $C^*_{\mathrm{red}}(F_n)$: il existe des appl. $M_\alpha : C^*_{\mathrm{red}}(F_n) \to C^*_{\mathrm{red}}(F_n)$ contractives et de rang fini telles que $M_\alpha(x) \to x$ pour tout x.
- un état $\varphi \in C^*(F_n)^*_+$ se factorise à travers λ **ssi** $(g \mapsto \varphi(g)e^{-t\ell(g)})$ est dans $\ell^2(F_n)$ pour tout $t > 0$.

Résultats classiques

Application à la représentation $\mathrm{ad} : C^*(F_n) \to B(\ell^2 F_n)$.
Le vecteur $\xi_0 = \delta_e \in \ell^2(F_n)$ est fixe ➔ $\mathrm{ad}^\circ = \mathrm{ad} \ominus \epsilon$ sur $\xi_0^\perp$.

Considérons $\varphi : x \mapsto (\delta_g | \mathrm{ad}(x)\delta_g)$, pour $g \neq e$ fixé.
La fonction $(h \mapsto \varphi(h))$ est la fonction caract. du centralisateur $C(g)$.
Or $C(g) = \{w^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $w = uvu^{-1}$, v cycliquement réduit.
➔ valeurs non nulles de $\varphi(h)e^{-t\ell(h)}$: $e^{-t(|k|p+q)}$, pour $h = w^k$.

Critère de Haagerup ➔ $\varphi \prec \lambda$ pour $g \neq e$.
Conclusion : $\mathrm{ad}^\circ \prec \lambda$.

Le cas quantique

Décroissance rapide :

Théorème (V. 2004)

Si on a $\Lambda_h(x) \subset p_k \ell^2 \mathbb{F}O_n$ *pour* $x \in C^*(\mathbb{F}O_n)$*, alors*
$$\|\lambda(x)\| \leq (2k+5)\|x\|_2.$$

A-T-moyennabilité :

Théorème (Brannan 2011)

Les applications T_t *sont complètement positives.*

Soit $\ell : C^*(\mathbb{F}O_n) \to \mathbb{C}$ non bornée donnée par
$$\ell(x) = k\epsilon(x) \text{ si } \Lambda_h(x) \in p_k \ell^2(\mathbb{F}O_n).$$

Corollaire : $\varphi \in C^*(\mathbb{F}O_n)^*_+$ se factorise à travers λ **ssi** $\varphi e^{-t\ell}$ est continue relativement à $\|\cdot\|_2$, pour tout $t > 0$.

Sur la représentation adjointe

La droite $\mathbb{C}\xi_0 \subset \ell^2\Gamma$ est invariante **ssi** Γ est unimodulaire.
→ On peut considérer $\mathrm{ad}^\circ = \mathrm{ad} \ominus \epsilon$ sur $\xi_0^\perp \subset \ell^2(\mathbb{F}O_n)$.

Théorème (Fima-V.)

Pour $\mathbb{F}O_n$ on a $\mathrm{ad}^\circ \prec \lambda$.

Preuve : utilise le critère précédent.
Cependant : pas de propriété « combinatoire » des centralisateurs comme dans le cas classique.
À la place : estimées de croissances pour $\varphi : x \mapsto (\xi|\mathrm{ad}(x)\xi)$, reposant sur des calculs dans la catégorie des coreprésentations de $\mathbb{F}O_n$.
Si $\xi \in p_l\ell^2(\mathbb{F}O_n)$, $\|\xi\| = 1$, $l \geq 1$ on a ainsi :

$$\|p_k\varphi\|_2 \leq C_l(1 + k^2).$$

Plan de l'exposé

Applications

Première application :

Corollaire (Vaes-V. 2005)

Pour $n \geq 3$, la représentation ad° a un trou spectral : $\epsilon \not\prec \mathrm{ad}^\circ$.
En part. $\mathbb{F}O_n$ n'est pas intérieurement moy. et $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est un facteur plein.

Deuxième application :

Corollaire (Fima-V.)

$\mathbb{F}O_n$ satisfait la « propriété (HH) forte » de [Ozawa-Popa 2008] : existence d'un cocycle propre dans une représentation faiblement contenue dans λ.

Solidité forte

Rappel : M fortement solide si pour toute $P \subset M$ diffuse moyennable, le normalisateur $\mathcal{N}_M(P)$ engendre une sous-algèbre de vN moyennable.
Fortement solide + non moyennable $\Rightarrow$ premier + absence de Cartan.

[Chifan-Sinclair 2011, Popa-Vaes 2012] CBAP + AO$^+$ $\Rightarrow$ fort. solide

Théorème (V. 2004)

$\mathbb{F}O_n$ *vérifie la propriété d'Akemann-Ostrand forte (AO$^+$).*

Théorème (Freslon 2012)

$\mathbb{F}O_n$ *est faiblement moyennable (CBAP) avec constante* 1.

Théorème (Isono 2012)

$\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ *est fortement solide.*

Solidité forte

Rappel : M fortement solide si pour toute $P \subset M$ diffuse moyennable, le normalisateur $\mathscr{N}_M(P)$ engendre une sous-algèbre de vN moyennable.
Fortement solide + non moyennable $\Rightarrow$ premier + absence de Cartan.

[Ozawa-Popa 2008] CBAP + (HH) forte $\Rightarrow$ fortement solide

Théorème (Fima-V.)

$\mathbb{F}O_n$ *vérifie la propriété (HH) forte.*

Théorème (Freslon 2012)

$\mathbb{F}O_n$ *est faiblement moyennable (CBAP) avec constante* 1.

Corollaire

$\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ *est fortement solide.*