KK-théorie et produits croisés par un groupe quantique

Roland Vergnioux
vergniou@math.jussieu.fr

6 mars 2002

Notations

[Baaj, Skandalis]

$V \in L(H \otimes H)$ régulier, irréductible (H sép.)

➜ S_r et $\widehat{S}_r$, C^*-alg. de Hopf bisimplifiables

Si V de type compact : projecteur sur la triviale

$p = (\mathrm{id} \otimes h)(V) \in \widehat{S}_r$.

A, B : C^*-algèbres S_r-équivariantes.

S_r-algèbre : δ_A injective et simplifiable.

E : B-module hilbertien S_r-équivariant δ_E

➜ $X_E \in L_B(E \otimes_{\delta_B} (B \otimes S_r), E \otimes S_r)$, $\delta_{K(E)}$

δ_B triviale ➜ $X_E \in L_B(E \otimes H)$ repr. de V :

$X_{12} X_{13} V_{23} = V_{23} X_{12}$ ➜ $\widehat{S}_X$.

Représentation covariante $\pi : A \to L_B(E)$ tq

$\delta_E(\pi(a)\zeta) = (\pi \otimes \mathrm{id})\delta_A(a) \cdot \delta_E(\zeta)$

➜ $(\pi \otimes \mathrm{id})\delta_A(a) = X(\pi(a) \otimes 1)X^*$ qd δ_B triviale.

KK-Théorie S-équivariante
[Kasparov, Baaj, Skandalis]

Définition $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}_{S_r}(A, B)$:

➜ E *de type dénombrable,* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-gradué*

➜ $\pi : A \to L_B(E)$ *covariante de degré* 0

➜ F *élément de degré* 1 *de* $L_B(E)$

➜ $[\pi(A), F] \subset K_B(E)$

➜ $\pi(A)(F^2 - 1)$ *et* $\pi(A)(F - F^*) \subset K_B(E)$

➜ $(\pi(A) \otimes S_r)(F \otimes 1 - \delta_{K(E)}(F)) \subset K_B(E) \otimes S_r$

Homotopie : induite par $\mathbb{E}_{S_r}(A, B[0,1])$ *et les évaluations en* 0 *et* 1 ➜ $KK_{S_r}(A, B)$.

Proposition *(stabilisation)*
V *de type compact,* $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$. *On a*

$$E \oplus (A \otimes H \otimes \mathcal{H}) \simeq (A \otimes H \otimes \mathcal{H}).$$

Produits croisés

Définition δ_B *triviale,* X *repr. sur* E*,*
$\pi : A \to L_B(E)$ *covariante non dég. :*

$$A \rtimes \widehat{S}_\pi = \overline{\mathrm{Vect}}\{\pi(a)s \mid a \in A,\, s \in \widehat{S}_X\}.$$

Exemples

$E_r = A \otimes H$, $\pi_r = \delta_A$, $X_r = 1 \otimes V$ ➜ $A \rtimes \widehat{S}_r$.
(E_p, π_p, X_p) «universelle» ➜ $A \rtimes \widehat{S}_p$.
On note $\lambda_A : A \rtimes \widehat{S}_p \to A \rtimes \widehat{S}_r$, $\lambda = \lambda_{\mathbb{C}}$.

Définition *Coactions de* $\widehat{S}_r$ *et* $\widehat{S}_p$ *sur*

➜ $A \rtimes \widehat{S}_r$ *:* $\widehat{\delta}^A_{r,r}$, $\widehat{\delta}^A_{r,p}$ *injectives, simplifiables.*

➜ $A \rtimes \widehat{S}_p$ *:* $\widehat{\delta}^A_{p,r}$, $\widehat{\delta}^A_{p,p}$ *simplifiables.*

➜ *et aussi* $\widehat{\delta}' : A \rtimes \widehat{S}_r \to \tilde{M}((A \rtimes \widehat{S}_p) \otimes \widehat{S}_r)$.

Applications de descente

Proposition

On pose $E \rtimes \widehat{S}_\pi = E \otimes_B (B \rtimes \widehat{S}_\pi)$ *(*$\pi = r$ *ou* p*).*

1. $K_{B \rtimes \widehat{S}_\pi}(E \rtimes \widehat{S}_\pi) \simeq K_B(E) \rtimes \widehat{S}_\pi$.
2. *Si* $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}_{S_r}(A, B)$ *alors* $(E \rtimes \widehat{S}_\pi, \pi \rtimes \mathrm{id}, F \rtimes 1) \in \mathbb{E}(A \rtimes \widehat{S}_\pi, B \rtimes \widehat{S}_\pi)$.
3. ➜ *morphismes* j_r *et* j_p *en* KK*-théorie.*

Points fixes

Définition *Soit* $W = (U \otimes 1)V(U \otimes 1)$, *on pose* $\delta_{E \otimes H} : \zeta \otimes \xi \mapsto (W(\xi \otimes 1))_{23} \delta_E(\zeta)_{13}$.

Proposition

1. $\phi \in L_B(E, F) \Rightarrow \psi = X_F(\phi \otimes_{\delta_B} \mathrm{id}) X_E^*$ $\in L_B(E \otimes H, F \otimes H)$ *est équivariant.*
2. *On a* $A \rtimes \widehat{S}_r \subset L_A(A \otimes H)^{S_r}$.

Proposition

1. V *de type discret* $\Rightarrow (A \rtimes \widehat{S}_r)^{\widehat{S}_r} = \pi_r(A)$.
2. V *de type compact,* A S_r*-algèbre* $\Rightarrow A \rtimes \widehat{S}_r = K_A(A \otimes H)^{S_r}$.

Définition V *de type compact. L'égalité 2. induit un isomorphisme*

$$\Phi : L_A(A \otimes H \otimes \mathcal{H})^{S_r} \xrightarrow{\sim} L_{A \rtimes \widehat{S}_r}((A \rtimes \widehat{S}_r) \otimes \mathcal{H}),$$

et le triplet $(A \otimes H, \mathrm{id}, 0)$ *définit un élément*

$$\beta \in KK_{S_r}((A \rtimes \widehat{S}_r)_{\mathrm{triv}}, A).$$

Théorème de Green-Julg

Théorème *B S_r-algèbre, δ_A triviale, V de type compact.*

1. *Φ induit un isomorphisme* $\Phi_* : KK_{S_r}(A, B) \to KK(A, B \rtimes \widehat{S}_r)$.
2. *On a* $\Phi_* = f^* \circ j_r$, *avec* $f : A \to A \rtimes \widehat{S}_r = A \otimes S_r,\ a \mapsto a \otimes p$.
3. *On a* $\Phi_*^{-1}(x) = h_*(x) \otimes \beta$, *avec* $h : \mathbb{C} \to S_r,\ \lambda \mapsto \lambda 1$.

Proposition *δ_B triviale.*
On a un morphisme canonique :

$$\Psi : KK_{S_r}(A, B) \to KK(A \rtimes \widehat{S}_p, B).$$

V de type discret ➔ Ψ isomorphisme.

K-Moyennabilité

Théorème *On a iv $\Rightarrow$ iii $\Rightarrow$ ii $\Rightarrow$ i :*

i. $\exists\ \alpha \in KK(\widehat{S}_r, \mathbb{C})\ \ \lambda^*(\alpha) = [\widehat{\varepsilon}_p]$.

ii. $[\lambda] \in KK(\widehat{S}_p, \widehat{S}_r)$ *est inversible.*

iii. $\forall\ A\ \ [\lambda_A] \in KK(A \rtimes \widehat{S}_p, A \rtimes \widehat{S}_r)$ *est inversible.*

iv. $\mathbb{1} \in KK_{S_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *est représenté par* $(E, 1, F)$ *tq* δ_E *est faiblement contenue dans* δ_r.

Si V *est de type discret, iv $\Leftrightarrow$ iii $\Leftrightarrow$ ii $\Leftrightarrow$ i.*

Définition *On dit que* S_r *est* K*-moyennable lorsque iv est vérifiée.*

Remarque Dans le cas discret,

$$j_p \circ \tau_A = \widehat{\delta}_{pp}^{A\,*} \circ \tau_{A \rtimes \widehat{S}_p} \circ \Psi$$

$[\widehat{\delta}'] \otimes_{S_r} \alpha$ est l'inverse de $[\lambda_A]$.