Graphes de Cayley des groupes quantiques libres et KK-théorie

Roland Vergnioux
vergniou@math.jussieu.fr

31 mars 2003

Groupes quantiques compacts

exemple des groupes discrets

[Woronowicz]

S C^*-algèbre de Woronowicz

$\delta : S \to S \otimes S$ coproduit

Ex. : $S = C_0(G)$, G compact,

$\delta(f)(r,s) = f(rs)$

Ex. : $S = C^*(\Gamma)$, $\delta(g) = g \otimes g$

coreprésentation de dim. finie :

$v \in L(H_v) \otimes S$ tq $(\mathrm{id} \otimes \delta)(v) = v_{12} v_{13}$

$v \oplus v'$, $v \otimes v'$, $\bar{v}$, ... ➔ catégorie tensorielle $\mathcal{C}$

Théorie « de Peter-Weyl » ➔ Irr $\mathcal{C}$

Ex. : Irr $\mathcal{C} \simeq \Gamma$, $v_g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes g$

$v_g \otimes v_{g'} = v_{gg'}$, $\bar{v}_g = v_{g^{-1}}$

C^*-algèbre duale : $\widehat{S} = \bigoplus_{s \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} L(H_s)$

projecteurs centraux minimaux $(p_s)_{s \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}$

Ex. : $\widehat{S} = \bigoplus \mathbb{C} g = C_0(\Gamma)$, $p_g = 1\!\!1_g$

Groupes quantiques compacts

exemple des groupes discrets

[Woronowicz]

$h \in S'$ état de Haar : $(h \otimes \mathrm{id})\delta = (\mathrm{id} \otimes h)\delta = 1_S h$

➔ $S_r \subset L(H)$ image de la représentation GNS

➔ $\widehat{S} \subset L(H)$, $p_r \in L(H)$ proj. orth.

Ex. : $h(g) = \delta_{g,e}$, $H = \ell^2(\Gamma)$
$C_0(\Gamma) \subset L(H)$ multiplication
$C_r^*(\Gamma) \subset L(H)$ repr. régulière
p_g proj. orth. sur $\mathbb{1}_g \in \ell^2(\Gamma)$

$V \in L(H \otimes H)$ unitaire multiplicatif
$(V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12})$
$U \in L(H)$ unitaire involutif

Ex. : $H \otimes H \simeq \ell^2(\Gamma)$
$V(f)(g, g') = f(g, g^{-1}g')$
$U(f)(g) = f(g^{-1})$

Groupes quantiques libres

[Wang, Banica]

On fixe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

$A_u(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ et $Q\bar{u}Q^{-1}$ unitaires)
où $u = (u_{i,j}) \in L(\mathbb{C}^n) \otimes A_u(Q)$ et $\bar{u} = (u^*_{i,j})$

➜ Irr $\mathcal{C}$: monoïde libre en u et $\bar{u}$ avec,
pour $v = u$ ou $\bar{u}$, $\overline{rv} = \bar{v}\bar{r}$ et
$rv \otimes \bar{v}r' = rv\bar{v}r' \oplus r \otimes r'$, $rv \otimes vr' = rvvr'$,

$A_o(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ unitaire, $Q\bar{u}Q^{-1} = u)$

➜ Irr $\mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $\bar{r}_k = r_k$, $r_1 = u$ et
$r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}$
(si $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$)

NB : $C^*(F_n) = C^*(1, u_i \mid \forall i \ u_i$ unitaire)

Graphe de Cayley

groupes discrets

Données

- Γ goupe discret
- $\Delta \subset \Gamma$ finie, $\Delta^{-1} = \Delta$, $e \notin \Delta$ (ensemble des directions)

Approche simpliciale

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists\, s \in \Delta \;\; r' = rs\}$
- retournement $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}, (r, r') \mapsto (r', r)$
- orientation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ \sqcup \theta(\mathfrak{a}_+)$
- arêtes géométriques : $\mathfrak{a}_g = \mathfrak{a}/\{\theta(a) \sim a\}$

Origine + direction

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta$
- $(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}, \;\; (r, s) \mapsto (r, rs)$
- retournement : $\theta(r, s) = (rs, s^{-1})$

Graphe de Cayley

groupes quantiques discrets

Données

- groupe quant. discret : S_r, (H, V, U), $\widehat{S}$, $\mathcal{C}$
- p_1 proj. central de $\widehat{S}$: $p_1 = \sum_{r\in\mathcal{D}} p_r$
- $Up_1U = p_1$, $p_0p_1 = 0 \iff \bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, $1_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{D}$

Graphe classique associé à (V, p_1)

- $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathcal{C} \mid \exists s \in \mathcal{D}\ r' \subset r \otimes s\}$
- θ bien défini : $r' \subset r \otimes s \iff r \subset r' \otimes \bar{s}$
- structure supplémentaire : arêtes multiples et colorées par $\mathcal{D}$

Graphe quantique associé à (V, p_1)

- espaces de Hilbert : H, $K = H \otimes p_1 H$
- $\Theta = \Sigma(1 \otimes U)V(U \otimes U)\Sigma$, $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$
- $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)$ et $B = O \circ \Theta : K \to H$
- $V : K \to H \otimes H$ « extrêmités »

NB : $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$

Orientation

Hypothèse

Le graphe classique de (V, p_1) est un arbre strict ➔ origine $1_\mathcal{C}$, orientation montante :

$$\mathfrak{a}_+ = \{(r, r') \mid \mathsf{d}(r', 1_\mathcal{C}) = \mathsf{d}(r, 1_\mathcal{C}) + 1\} \subset \mathfrak{a}$$

Définition

➔ $p_n = \sum \{p_r \mid d(r, 1_\mathcal{C}) = n\}$

➔ $p_{\star +} = \sum_{(r,r') \in \mathfrak{a}_+} V^*(p_r \otimes p_{r'})V$,

➔ $p_{\star -} = 1 - p_{\star +}$, $p_{+\star} = \Theta^* p_{\star -} \Theta$

➔ $p_{++} = p_{\star +} p_{+\star}$, $p_{+-} = p_{\star -} p_{+\star}$, ...

➔ $K_{++} = p_{++}K$ *espace des arêtes montantes*

On pose $\boxed{F_g^* = Bp_{++} : K_g \to H.}$

Image et noyau de F_g^*

On suppose que le graphe classique associé à (V, p_1) est un arbre strict.

Proposition *$B_{|K_{++}}$ est injectif et son image est $(1-p_0)H$. De plus il commute à S_r modulo des opérateurs compacts.*

Théorème *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$(p_{++}+p_{--})\Theta^n(p_{++}+p_{--}) = \\ = (p_{++}+p_{--})\Theta^{-n}(p_{++}+p_{--}).$$

Théorème *La restriction de p_{++} à K_g est injective et son image est*

$$\{\zeta \in K_{++} \mid p_{+-}\Theta p_{++}\,\zeta \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta p_{+-})\}.$$

Proposition *Le groupe quantique discret associé à V est un produit libre fini de groupes $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i\bar{Q}_i \in \mathbb{C}\mathrm{id}$.*

Espace H_∞ pour $A_o(Q)$

Définition

- $T = (p_{+-} \ominus p_{+-})_u$, $S \simeq p_{+-} \ominus p_{++}$
- $H_\infty = \varinjlim\, ((p_k \otimes p_1) K_{+-}, T)$
- $i_k : (p_k \otimes p_1) K_{+-} \xrightarrow[can]{} H_\infty$, $P = \sum i_k (p_k \otimes p_1)$

Proposition *On suppose que* Tr $Q^* Q > 2$. *Alors $R = PS : K_{++} \to H_\infty$ est borné, surjectif, et* Ker $R = \{\xi \in K_{++} \mid S\xi \in \mathrm{Im}\ (T - \mathrm{id})\}$.

$$
\begin{tikzcd}
K_g \arrow[dr, "p_{++}"] & & \\
& K_{++} \arrow[r, "B"] & (1 - p_0) H \\
H_\infty \arrow[ur, "R^*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Représentation π_∞ pour $A_o(Q)$

$$
\begin{tikzcd}
p_l K_{+-} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r, "T"] & p_k K_{+-} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & p_{k+1} K_{+-} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r, "T"] & H_\infty \arrow[dd, dashed, "\pi_\infty(a)"'] \\
\mathcal{K}_{+-} \arrow[d, "P"] & & \mathcal{K}_{+-} \arrow[d, "P"] \arrow[r, phantom, "\not\circlearrowright"] & \mathcal{K}_{+-} \arrow[d, "P"] & & \\
H_\infty \arrow[r, "="] & \cdots \arrow[r, "="] & H_\infty \arrow[r, "="] & H_\infty \arrow[r, "="] & \cdots \arrow[r, "="] & ?
\end{tikzcd}
$$

Théorème *On note $\varphi_{+-}(a) = p_{+-}(a \otimes 1)p_{+-}$ pour tout élément $a \in \mathcal{S} \subset S_r$.*

- ➜ *Soit $\zeta \in (p_k \otimes p_1)K_{+-}$, alors $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta)_n$ converge vers un vecteur $\pi_\infty(a)(i_k\zeta) \in H_\infty$.*
- ➜ *$(a \mapsto \pi_\infty(a))$ définit un homomorphisme de S_r dans $L(H_\infty)$.*

Proposition *R^* et $p_{++\,|K_g}$ commutent aux représentations de S_r modulo les compacts.*

- ➜ *$F_g^* + BR^*$ définit un élément $\gamma \in KK_{\widehat{S}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*