Graphes de Cayley pour les groupes quantiques discrets

Roland Vergnioux
vergniou@math.jussieu.fr

9 avril 2003

Groupes quantiques compacts

Objets C^*-algébriques

S C^*-algèbre unifère, munie d'un morphisme $\delta : S \to S \otimes S$ coassociatif et bisimplifiable.

Objets fonctoriels

Coreprésentation de dim. finie : $v \in L(H_v) \otimes S$ tel que $(\mathrm{id} \otimes \delta)(v) = v_{12} v_{13}$

➔ catégorie $\mathcal{C}$, prod. tensoriel et conjugaison

➔ Irr $\mathcal{C}$, théorie « de Peter-Weyl »

➔ caractères : dim $H_v = 1$ ➔ groupe

Objets hilbertiens

Il existe un état $h \in S^*$ invariant pour δ.

➔ $H = L^2(S, h)$, $\lambda : S \to L(H)$, $S_r = \lambda(S)$

➔ décomposition $H = \bigoplus_{r \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}} \; p_r H$

➔ $V \in L(H \otimes H)$ unitaire multiplicatif,

➔ $U \in L(H)$ unitaire involutif

Groupes quantiques discrets

Groupe quantique compact associé à Γ

(Γ groupe discret)

- $*$-algèbre du groupe : $\mathbb{C}\Gamma = \bigoplus_{g\in\Gamma} \mathbb{C}g$
- $S = C^*\Gamma$, complétion « pleine » de $\mathbb{C}\Gamma$
- coproduit : $\delta(g) = g \otimes g$

Alors :

- Irr $\mathcal{C} \simeq \Gamma$ ($v_g = \mathrm{id} \otimes g \in L(\mathbb{C}) \otimes S$)
- $H = \ell^2(\Gamma)$, $(\lambda(g)\phi)(s) = \phi(g^{-1}s)$
- $S_r = C^*_r\Gamma$, complétion « réduite » de $\mathbb{C}\Gamma$
- p_r proj. orth. sur $\mathbb{1}_{\{r\}} \in \ell^2(\Gamma)$
- $V(f)(g,h) = f(g, g^{-1}h)$, $U(f)(g) = f(g^{-1})$

Groupes quantiques discrets

(interprétation duale du cas général)

- $S \to S_r \subset L(H)$: espace ℓ^2 et repr. régulière
- Irr $\mathcal{C}$: « points » du groupe
- $\sum_{r\in\mathcal{D}} p_r$, $\mathcal{D} \subset$ Irr $\mathcal{C}$: projecteur « sur $\mathcal{D}$ » dans l'espace ℓ^2 du groupe quantique

Groupes quantiques libres
[Wang, Banica]

Groupe libre

$S = C^*(F_n) = C^*(1, u_i \mid \forall i\ u_i$ unitaire$)$

Groupe quantique libre unitaire

On fixe $n \geq 2$ et $Q \in GL_n(\mathbb{C})$.

$A_u(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ et $Q\bar{u}Q^{-1}$ unitaires$)$
où $u = (u_{i,j}) \in L(\mathbb{C}^n) \otimes A_u(Q)$ et $\bar{u} = (u^*_{i,j})$

➔ Irr $\mathcal{C}$: monoïde libre en u et $\bar{u}$ avec, pour $v = u$, $\bar{u}$, les règles $\overline{rv} = \bar{v}\bar{r}$ et $rv \otimes \bar{v}r' = rv\bar{v}r' \oplus r \otimes r'$, $rv \otimes vr' = rvvr'$

Groupe quantique libre orthogonal

On suppose de plus que $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$.

$A_o(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ unitaire, $Q\bar{u}Q^{-1} = u)$

➔ Irr $\mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $\bar{r}_k = r_k$, $r_1 = u$ et $r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}$

Graphe de Cayley

groupes discrets

Données

- Γ groupe discret
- $\Delta \subset \Gamma$ finie, $\Delta^{-1} = \Delta$, $e \notin \Delta$ (ensemble des directions)

Approche simpliciale

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists s \in \Delta \ r' = rs\}$
- retournement $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}, (r, r') \mapsto (r', r)$
- arêtes géométriques : $\mathfrak{a}_g = \mathfrak{a}/\{\theta(a) \sim a\}$
- orientation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ \sqcup \theta(\mathfrak{a}_+)$

Origine + direction

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta$
- $(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}, \ (r, s) \mapsto (r, rs)$
- retournement : $\theta(r, s) = (rs, s^{-1})$

Graphe de Cayley

groupes quantiques discrets

Données

- groupe quant. discret : S, $\mathcal{C}$, (H, V, U)
- $\mathcal{D} \subset \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ finie $\iff p_1 = \sum_{r\in\mathcal{D}} p_r$
- $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, $1_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{D} \iff Up_1U = p_1$, $p_0p_1 = 0$

Graphe classique associé à $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

- $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists\, s \in \mathcal{D}\ r' \subset r \otimes s\}$
- θ bien défini : $r' \subset r \otimes s \iff r \subset r' \otimes \bar{s}$
- structure supplémentaire : arêtes multiples et colorées par $\mathcal{D}$

Graphe quantique associé à $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

- espace ℓ^2 des sommets : H
- espace ℓ^2 des arêtes : $K = H \otimes p_1 H$
- $\Theta = \Sigma(1 \otimes U)V(U \otimes U)\Sigma$, $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$
- $V : K \to H \otimes H$ « extrêmités »
- $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)V$ et $B = (\epsilon \otimes \mathrm{id})V$

NB : $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$

Orientation

dans le cas des arbres

Hypothèse

Le graphe classique de $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est un arbre strict

➜ origine $1_{\mathcal{C}}$, orientation montante :

$$\mathfrak{a}_+ = \{(r, r') \mid \mathsf{d}(r', 1_{\mathcal{C}}) = \mathsf{d}(r, 1_{\mathcal{C}}) + 1\} \subset \mathfrak{a}$$

Définition

➜ $p_n = \sum \{p_r \mid d(r, 1_{\mathcal{C}}) = n\}$

➜ $p_{\star+} = \sum \{V^*(p_r \otimes p_{r'})V \mid (r, r') \in \mathfrak{a}_+\}$

➜ $p_{\star-} = 1 - p_{\star+}$

Proposition

➜ $p_{+\star} := \Theta^* p_{\star-}\Theta$ *est différent de* $p_{+\star}$

➜ $\Theta p_{+\star}(p_k \otimes p_1) = p_{\star-}(p_{k+1} \otimes p_1)\Theta$,
$\Theta^* p_{\star+}(p_k \otimes p_1) = p_{-\star}(p_{k+1} \otimes p_1)\Theta^*$

Définition

➜ $p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}$, $p_{+-} = p_{+\star}p_{\star-}$, ...

➜ *espace des arêtes montantes :* $K_{++} = p_{++}K$

Opérateur de Julg-Valette

On suppose que le graphe classique associé à $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est un arbre strict.

Définition $F_g^* \ : \ K_g \xrightarrow{p_{++}} K_{++} \xrightarrow{B} H$

Théorème

1. $B_{|K_{++}}$ *est injectif et son image est* $(p_0 H)^\perp$.
2. $p_{++|K_g}$ *est injectif et son image est* $\{\zeta \in K_{++} \mid p_{+-}\Theta p_{++}\, \zeta \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta p_{+-})\}$.

Proposition *Le groupe quantique discret associé à V est un produit libre fini de groupes $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i\bar{Q}_i \in \mathbb{C}\mathrm{id}$.*

➡ Il suffit d'étudier le cas de $A_o(Q)$.

Espace H_∞ pour $A_o(Q)$

On considère l'arbre de $A_o(Q)$ avec $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}\mathrm{id}$ et Tr $Q^*Q > 2$. On pose

$$H_\infty = \varinjlim \left((p_k \otimes p_1) K_{+-}, p_{+-} \Theta p_{+-} \right).$$

Proposition *Il existe un opérateur borné $R : K_{++} \to H_\infty$ surjectif et tel que* Ker $R = p_{++} K_g$.

$$\begin{tikzcd}
K_g \arrow[dr, "p_{++}"] & & \\
& K_{++} \arrow[r, "B"] & (p_0 H)^\perp \subset H \\
H_\infty \arrow[ur, "R^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Théorème *L'opérateur $F_g^* + BR^*$ de $K_g \oplus H_\infty$ dans H définit un élément $\gamma \in KK_{\widehat{S}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*