Graphes de Cayley des groupes quantiques libres

Roland Vergnioux
`vergniou@math.jussieu.fr`

11 juillet 2003

1. Rappels sur les groupes quantiques
   – groupes quantiques compacts
   – groupes quantiques discrets
   – exemples : $A_u(Q)$, $A_o(Q)$
2. Graphes de Cayley quantiques
   – graphes de Cayley classiques
   – graphes de Cayley quantiques
3. Orientation montante
   – arêtes montantes
   – espace à l'infini
4. Distance à l'origine
   – le cas classique : F_n
   – le cas quantique : $A_o(Q)$

Groupes quantiques compacts

Objets C^*-algébriques

S C^*-algèbre unifère, munie d'un morphisme $\delta : S \to S \otimes S$ coassociatif et bisimplifiable.

Objets fonctoriels

Coreprésentation de dim. finie : $v \in L(H_v) \otimes S$ tel que $(\mathrm{id} \otimes \delta)(v) = v_{12} v_{13}$

➔ catégorie $\mathcal{C}$, prod. tensoriel et conjugaison

➔ Irr $\mathcal{C}$, théorie « de Peter-Weyl »

Objets hilbertiens

Il existe un état $h \in S^*$ invariant pour δ.

➔ $H = L^2(S, h)$, $\lambda : S \to L(H)$, $S_r = \lambda(S)$

➔ décomposition $H = \bigoplus_{r \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}} \ p_r H$

➔ $V \in L(H \otimes H)$ unitaire multiplicatif

➔ $U \in L(H)$ unitaire involutif

Groupes quantiques discrets

Groupe quantique compact associé à Γ

(Γ groupe discret)

- $*$-algèbre du groupe : $\mathbb{C}\Gamma = \bigoplus_{g\in\Gamma} \mathbb{C}g$
- $S = C^*\Gamma$, complétion « pleine » de $\mathbb{C}\Gamma$
- coproduit : $\delta(g) = g\otimes g$

Alors :

- Irr $\mathcal{C} \simeq \Gamma$ ($v_g = \mathrm{id}\otimes g \in L(\mathbb{C})\otimes S$)
- $H = \ell^2(\Gamma)$, $(\lambda(g)\phi)(s) = \phi(g^{-1}s)$
- $S_r = C_r^*\Gamma$, complétion « réduite » de $\mathbb{C}\Gamma$
- p_r proj. orth. sur $\mathbb{1}_{\{r\}} \in \ell^2(\Gamma)$
- $V(f)(g,h) = f(g, g^{-1}h)$, $U(f)(g) = f(g^{-1})$

Groupes quantiques discrets

(interprétation duale du cas général)

- $S \to S_r \subset L(H)$: espace ℓ^2 et repr. régulière
- Irr $\mathcal{C}$: « points » du groupe
- $\sum_{r\in\mathcal{D}} p_r$, $\mathcal{D} \subset$ Irr $\mathcal{C}$: projecteur « sur $\mathcal{D}$ » dans l'espace ℓ^2 du groupe quantique

Groupes quantiques libres

Groupe libre

$S = C^*(F_n) = C^*(1, u_i \mid \forall i \; u_i \text{ unitaire})$

Groupe quantique libre unitaire

On fixe $n \geq 2$ et $Q \in GL_n(\mathbb{C})$.

$A_u(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u \text{ et } Q\bar{u}Q^{-1} \text{ unitaires})$
où $u = (u_{i,j}) \in L(\mathbb{C}^n) \otimes A_u(Q)$ et $\bar{u} = (u^*_{i,j})$

➜ Irr $\mathcal{C}$: monoïde libre en u et $\bar{u}$ avec,
pour $v = u$, $\bar{u}$, les règles $\overline{rv} = \bar{v}\bar{r}$ et
$rv \otimes \bar{v}r' = rv\bar{v}r' \oplus r \otimes r'$, $rv \otimes vr' = rvvr'$

Groupe quantique libre orthogonal

On suppose de plus que $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$.

$A_o(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u \text{ unitaire}, Q\bar{u}Q^{-1} = u)$

➜ Irr $\mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $\bar{r}_k \simeq r_k$, $r_1 = u$ et
$r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}$

Graphe de Cayley

groupes discrets

Données

- Γ groupe discret
- $\Delta \subset \Gamma$ finie, $\Delta^{-1} = \Delta$, $e \notin \Delta$ (ensemble des directions)

Approche simpliciale

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists\, s \in \Delta\ r' = rs\}$
- retournement $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}, (r, r') \mapsto (r', r)$
- arêtes géométriques : $\mathfrak{a}_g = \mathfrak{a}/\{\theta(a) \sim a\}$
- orientation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ \sqcup \theta(\mathfrak{a}_+)$

Origine + direction

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta$
- $(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{s} \times \mathfrak{s},\ (r, s) \mapsto (r, rs)$
- retournement : $\theta(r, s) = (rs, s^{-1})$

Application de Julg-Valette

- $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ arbre muni d'une origine
- $\mathfrak{a}_+$: orientation « montante »
- $f_g^{-1} : \mathfrak{a}_g \xrightarrow[\text{choix}]{} \mathfrak{a}_+ \xrightarrow[\text{but}]{} \mathfrak{s}$

Graphe de Cayley

groupes quantiques discrets

Données

- groupe quant. discret : S, $\mathcal{C}$, (H, V, U)
- $\mathcal{D} \subset \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ finie $\iff p_1 = \sum_{r \in \mathcal{D}} p_r$
- $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, $1_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{D} \iff Up_1U = p_1$, $p_0 p_1 = 0$

Graphe classique associé à $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

- $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists\, s \in \mathcal{D}\ r' \subset r \otimes s\}$
- θ bien défini : $r' \subset r \otimes s \iff r \subset r' \otimes \bar{s}$
- structure supplémentaire : arêtes multiples et colorées par $\mathcal{D}$

Graphe quantique associé à $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

- espace ℓ^2 des sommets : H
- espace ℓ^2 des arêtes : $K = H \otimes p_1 H$
- $\Theta = \Sigma(1 \otimes U)V(U \otimes U)\Sigma$, $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$
- $V : K \to H \otimes H$ « extrémités »
- $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)V$ et $B = (\epsilon \otimes \mathrm{id})V$

NB : $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$

Arêtes montantes

Hypothèse

Le graphe classique de $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est un arbre strict

➔ origine $1_\mathcal{C}$, orientation montante :

$$\mathfrak{a}_+ = \{(r, r') \mid \mathrm{d}(r', 1_\mathcal{C}) = \mathrm{d}(r, 1_\mathcal{C}) + 1\} \subset \mathfrak{a}$$

Proposition *Dans ce cas le groupe quantique discret associé à V est un produit libre fini de groupes $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i\bar{Q}_i \in \mathbb{C}\mathrm{id}$.*

Définition

➔ $p_n = \sum \{p_r \mid d(r, 1_\mathcal{C}) = n\}$

➔ $p_{\star+} = \sum \{V^*(p_r \otimes p_{r'})V \mid (r, r') \in \mathfrak{a}_+\}$

➔ $p_{+\star} := \Theta^*(1 - p_{\star+})\Theta \neq p_{\star+}$ **!**

➔ $p_{\star-} = 1 - p_{\star+}$, $p_{-\star} = 1 - p_{+\star}$

➔ $p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}$, $p_{+-} = \cdots$

Espace à l'infini

On considère l'arbre de $A_o(Q)$ avec $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}\mathrm{id}$ et Tr $Q^*Q > 2$.

Théorème
$p_{++|K_g}$ est injectif et son image est
$\{\zeta \in K_{++} \mid p_{+-}\Theta p_{++}\,\zeta \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta p_{+-})\}$.

Définition *$p_{+-}\Theta p_{+-}$ est un « shift » à droite, on pose $H_\infty = \varinjlim\ ((p_k \otimes p_1)p_{+-}K, p_{+-}\Theta p_{+-})$.*

Théorème
Il existe un opérateur borné $R : K_{++} \to H_\infty$ surjectif et tel que Ker $R = p_{++}K_g$.

Corollaire
$B \circ (p_{++} + R^*) : K_g \oplus H_\infty \to H$ définit un élément $\gamma \in KK(S_r, \mathbb{C})$ d'indice 1.

Fonction de type négatif

sur F_n

Cocycle relatif à $\pi : \Gamma \to L(H)$:
$c : \Gamma \to H$ tel que $c(gh) = \pi(g)c(h) + c(g)$
$\Leftrightarrow c(g) = \alpha(g)\xi_0 - \xi_0$ avec $\vec{\alpha} = \pi$

Dans l'espace des sommets :
Aff $\{{\scriptstyle(-1)^{|g|}}\,\delta_g \mid g \in \Gamma\} \subset \ell^2(\Gamma)$ est stable par λ'
➜ représentation affine de Γ
➜ cocyle $c_H(g) = {\scriptstyle(-1)^{|g|}}\,\delta_g - \delta_e \in H$

Dans l'espace des arêtes géométriques :
Si $(a_1, \ldots, a_k)$ est le chemin reliant e à g, on pose $c_2(g) = \sum {\scriptstyle(-1)^i}\,\delta_{a_i} \in K_g$.
$(B{+}O)(c_2(g)) = \sqrt{2}\, c_1(g)$ ➜ cocycle pour $\lambda' {\otimes} 1$.

Fonctions de type négatif : $\varphi(g) = ||c(g)||^2$
➜ $\varphi_1(g) = 2\mathbb{1}_{g \neq e}$ (trivial)
➜ $\varphi_2(g) = |g|$ (intéressant)

Fonction de type négatif

sur $A_o(Q)$

$\mathcal{S} \subset S$ sous-*-algèbre de Hopf dense
$\varepsilon : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ co-unité, $\kappa : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ antipode
Par ex. : $\mathcal{S} = \mathbb{C}\Gamma \subset C^*(\Gamma)$, $\varepsilon(g) = 1$, $\kappa(g) = g^{-1}$

Proposition *($\kappa^2 = 1$)*
*Soit $\pi : S \to L(H)$ *-repr. et $c : \mathcal{S} \to H$ linéaire tq $c(1) = 0$ et $c(xy) = \pi(x)c(y) + \varepsilon(y)c(x)$. Pour $x \in \mathcal{S}$ on pose $\delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ et $\varphi(x) = \sum (c(\kappa(x_{(1)})^*) | c(x_{(2)}))$. Alors*

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\ \varepsilon \quad \varphi(x^* x) \leq 0.$$

Théorème *($A_o(Q)$, $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}\mathrm{id}$, $\mathrm{Tr}\ Q^*Q > 2$)*
Alors $\mathrm{Ker}(B+O) = K_g^{\perp}$ et $(B+O)(K_g)$ contient $c_1(x) = \lambda'(x)\delta_1 - \varepsilon(x)\delta_1$ pour tout $x \in \mathcal{S}$.

→ chemins et distance à l'origine dans le graphe de Cayley quantique, déformation de H, ...