

Graphes de Cayley quantiques et espace des arêtes à l'infini

Roland Vergnioux

`vergniou@math.uni-muenster.de`

27 janvier 2004

1. arbres de Cayley quantiques
 - groupes quantiques discrets
 - groupes quantiques libres
 - graphes de Cayley quantiques
 - orientation ascendante
2. espaces des arêtes à l'infini
3. applications

Groupes quantiques discrets

[Woronowicz]

Algèbre du groupe

- C^* -algèbre S unifère et $\delta : S \rightarrow S \otimes S$
- coassociativité : $(\text{id} \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes \text{id}) \circ \delta$
- $\delta(S)(1 \otimes S)$ et $\delta(S)(S \otimes 1)$ denses dans $S \otimes S$
- catégorie des coreprésentations \mathcal{C}
(cf. groupes compacts : \oplus , \otimes , $\text{Irr } \mathcal{C}$, ...)

Algèbre des fonctions

- C^* -algèbre $\hat{S} = \bigoplus_{r \in \text{Irr } \mathcal{C}} L(H_r)$
- coproduit $\hat{\delta} : \hat{S} \rightarrow M(\hat{S} \otimes \hat{S})$
- projecteurs $p_r = \text{id}_{H_r} \in \hat{S}$ pour $r \in \text{Irr } \mathcal{C}$

Espace ℓ^2

- espace de Hilbert H
- représentations $S, \hat{S} \rightarrow L(H)$
- unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$
- unitaire involutif $U \in L(H)$

Groupes quantiques libres

[Wang, Banica]

On fixe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

Cas classique

NB : $C^*(F_n) = C^*(1, u_i \mid \forall i u_i \text{ unitaire})$

Version unitaire

$A_u(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u \text{ et } Q\bar{u}Q^{-1} \text{ unitaires})$

où $u = (u_{i,j}) \in M_n(A_u(Q))$ et $\bar{u} = (u_{i,j}^*)$

→ Irr \mathcal{C} : monoïde libre en u et \bar{u} avec

$$ru \otimes \bar{u}r' = ru\bar{u}r' \oplus r \otimes r', \quad ru \otimes ur' = ruur'.$$

Version orthogonale

$A_o(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u \text{ unitaire, } Q\bar{u}Q^{-1} = u)$

→ Irr $\mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $r_1 = u$ et, si $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$,

$$r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}.$$

Graphes de Cayley quantiques

Définition

Données

- groupe quant. discret : $S, \hat{S}, \mathcal{C}, (H, V, U)$
- p_1 proj. central de \hat{S} : $p_1 = \sum_{r \in \mathcal{D}} p_r$
- $Up_1U = p_1, p_0p_1 = 0 \iff \bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}, 1_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{D}$

Graphe classique associé à (S, p_1)

- $\mathfrak{s} = \text{Irr } \mathcal{C}, \mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathcal{C} \mid \exists s \in \mathcal{D} r' \subset r \otimes s\}$
- θ bien défini : $r' \subset r \otimes s \iff r \subset r' \otimes \bar{s}$
- structure supplémentaire : arêtes multiples et colorées par \mathcal{D}

Graphe quantique associé à (S, p_1)

- espaces de Hilbert : $H, K = H \otimes p_1 H$
- $\Theta = \Sigma(1 \otimes U)V(U \otimes U)\Sigma, K_g = \text{Ker}(\Theta - \text{id})$
- $V : K \rightarrow H \otimes H$ « extrêmités »
- $O = (\text{id} \otimes \epsilon)V, B = (\epsilon \otimes \text{id})V$

NB : $\Theta^2 \neq \text{id}$

Orientation ascendante

(cas des arbres)

Hypothèse

Le graphe classique est un arbre « strict »

→ origine 1_C , orientation montante :

$$\mathfrak{a}_+ = \{(r, r') \in \mathfrak{a} \mid d(r', 1_C) > d(r, 1_C)\}$$

Proposition *Le groupe quantique discret associé à S est un produit libre fini de groupes $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i \bar{Q}_i \in \text{Cid}$.*

Définition

- $p_n = \sum \{p_r \mid d(r, 1_C) = n\}$
- $p_{\star+} = \sum_{(r,r') \in \mathfrak{a}_+} V^*(p_r \otimes p_{r'})V$
- $p_{\star-} = 1 - p_{\star+}$
- $\Theta^* p_{\star-} \Theta \neq p_{\star+} !! \quad \rightarrow p_{+\star} = \Theta^* p_{\star-} \Theta$
- $p_{++} = p_{\star+} p_{+\star}, p_{+-} = p_{\star-} p_{+\star}, \dots$
- $K_{++} = p_{++} K$ espace des arêtes montantes