| Groupes quantiques discrets | Groupes discrets |
|---|---|
| $S = c_0\text{-}\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{I}} L(H_\alpha)$, $\dim H_\alpha < \infty$<br>$\mathcal{S} = \text{alg-}\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{I}} L(H_\alpha)$ idéal dense | $S = c_0(\Gamma)$, $\mathcal{I} = \Gamma$, $H_\alpha = \mathbb{C}$<br>$\mathcal{S} = \mathbb{C}^{(\Gamma)}$ |
| $\delta : S \to M(S\otimes S)$ coassociatif, $\kappa : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$<br>$\varepsilon : S \to \mathbb{C}$ co-unité (repr. triviale : $\varepsilon \in \mathcal{I}$) | $\delta(a)(\alpha,\beta) = a(\alpha\beta)$, $\kappa(a)(\alpha) = a(\alpha^{-1})$<br>$\varepsilon(a) = a(1_\Gamma)$ ($\varepsilon = 1_\Gamma \in \mathcal{I}$) |
| Poids de Haar $h_L$, $h_R$ définis sur $\mathcal{S}$<br>$\forall\, a \in L(H_\alpha)$ $\quad h_L(a) = m_\alpha \mathrm{Tr}\ (F_\alpha^{-1}a)$ et<br>$\qquad\qquad h_R(a) = m_\alpha \mathrm{Tr}\ (F_\alpha a)$<br>avec $F_\alpha \in L(H_\alpha)_+$ tq $\mathrm{Tr}\ F_\alpha = \mathrm{Tr}\ F_\alpha^{-1} =: m_\alpha$ | $h_L = h_R$ mesure de comptage sur $\Gamma$<br><br>$(S,\delta)$ unimodulaire : $h_L = h_R \iff$<br>$\forall\alpha\ F_\alpha = \mathrm{id} \iff \kappa^2 = 1 \iff \hat{h}$ trace |
| $\Lambda : \mathcal{S} \to H$ construction GNS pour $h_R$<br>$V \in L(H\otimes H)$ unitaire multiplicatif<br>$V \in M(\hat{S}_r\otimes S)$ avec $\hat{S}_r = (\mathrm{id}\otimes L(H)_*)(V)^-$<br>$\hat{S}_r$ est munie de $\hat{\delta}$, $\hat{h}$, ... | $H = \ell^2(\Gamma)$, $H\otimes H \simeq \ell^2(\Gamma\times\Gamma)$<br>$V(\xi)(\alpha,\beta) = \xi(\alpha\beta,\beta)$<br>$V = \sum \rho_\alpha \otimes 1\!\!1_\alpha \in M(C^*_r(\Gamma)\otimes c_0(\Gamma))$<br>$\hat{S}_r = C^*_r(\Gamma)$ (algèbre de convolution) |
| $\mathcal{F}(a) = (\mathrm{id}\otimes h_R)(V^*(1\otimes a)) \in \hat{S}_r$ pour $a \in \mathcal{S}$<br>$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \hat{S}_r$, $\hat{h}(\mathcal{F}(a)^*\mathcal{F}(a)) = h_R(a^*a)$ | $\mathcal{F}(a) = \sum a(\alpha)\rho_{\alpha^{-1}}$, $\hat{\mathcal{S}} = \mathbb{C}\Gamma \subset C^*_r(\Gamma)$ |

Dans le cas d'un groupe discret abélien, $C^*_r(\Gamma) \simeq C(\hat{\Gamma})$ via $\alpha \mapsto \langle\,\cdot\,,\alpha\rangle$. Alors

$$V = [(\hat{\alpha},\alpha) \mapsto \langle\hat{\alpha},\alpha\rangle] \in C_b(\hat{\Gamma}\times\Gamma) \quad \text{et} \quad F(a) = [\hat{\alpha} \mapsto \textstyle\sum_\alpha a(\alpha)\langle\hat{\alpha},\alpha^{-1}\rangle].$$

| Groupe quantique discret | Groupe compact |
|---|---|
| $S = c_0\text{-}\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{I}} L(H_\alpha)$, $\dim H_\alpha < \infty$<br>$\mathcal{S} = \text{alg-}\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{I}} L(H_\alpha)$ | $S = C^*(G)$, $\mathcal{I} = \text{Irrep}(G)$<br>$H_\alpha$ espace de la repr. $\alpha$ |
| $\delta : S \to M(S\otimes S)$ coassociatif, $\kappa : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$<br>$\varepsilon : S \to \mathbb{C}$ co-unité (repr. triviale : $\varepsilon \in \mathcal{I}$) | $\delta(U_g) = U_g\otimes U_g$<br>$\varepsilon(U_g) = 1$, $\kappa(U_g) = U_g^{-1}$ |
| Poids de Haar $h_L$, $h_R$ définis sur $\mathcal{S}$<br>$\forall\ a \in L(H_\alpha)\quad h_L(a) = m_\alpha \mathrm{Tr}\ (F_\alpha^{-1}a)$ et<br>$\qquad\qquad h_R(a) = m_\alpha \mathrm{Tr}\ (F_\alpha a)$<br>avec $F_\alpha \in L(H_\alpha)_+$ tq Tr $F_\alpha$ = Tr $F_\alpha^{-1} =: m_\alpha$ | $h_L = h_R$ “trace canonique” de $C^*(G)$<br>$F_\alpha = \mathrm{id}$, $m_\alpha = \dim H_\alpha$ |
| $\Lambda : \mathcal{S} \to H$ construction GNS pour $h_R$<br>$V \in L(H\otimes H)$ unitaire multiplicatif<br>$V \in M(\hat{S}_r\otimes S)$ avec $\hat{S}_r = (\mathrm{id}\otimes L(H)_*)(V)^-$ | $\hat{S}_r = C(G)$, $\hat{\delta}(\hat{a})(g,h) = \hat{a}(gh)$<br>$\hat{h}$ mesure de Haar de $G$ (trace) |
| $\mathcal{F}(a) = (\mathrm{id}\otimes h_R)(V^*(1\otimes a)) \in \hat{S}_r$ pour $a \in \mathcal{S}$<br>$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \hat{S}_r$, $\hat{h}(\mathcal{F}(a)^*\mathcal{F}(a)) = h_R(a^*a)$ | pour $a \in L(H_\alpha)$, $\mathcal{F}(a) \in C(G)$ est un coefficient de la repr. $\alpha$ |