Université Denis Diderot (Paris VII) 2000-2001

51MT231

DST n°4

Lundi 08 Janvier 2001

Exercice 1 [329] Soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_a = \begin{pmatrix} -2-a & -4-3a & a+4 \\ a+1 & 3a+1 & -a-1 \\ a+1 & 3a-1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f_a. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de f_{-2} est triangulaire supérieure.
3. On se place dans le cas où $a = 0$, et on pose $f = f_0$.

   (a) Montrer qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Dans cette question et dans les suivantes, on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées des vecteurs u_1, u_2 et u_3 dans la base canonique.

   On pose $v = u_1 + u_2 + u_3$.

   (b) Donner l'expression de $f(v)$, $f^2(v)$ et $f^3(v)$ (où $f^n(v) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(v)$) en fonction de u_1, u_2 et u_3.

   (c) En déduire que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Donner la matrice de f dans la base $(v, f(v), f^2(v))$.

Exercice 2 [330]

Résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = & 13x - 20y - 10z \\ y' = & 15x - 22y - 10z \\ z' = & -15x + 20y + 8z. \end{cases}$$

Barème indicatif : 1-1 : 5 points 1-2 : 3 points 1-3 : 6 points 2 : 6 points