Université Denis Diderot (Paris VII) 2000-2001
51MT231

Corrigé du DST n°4
Lundi 08 Janvier 2001

Exercice 1, question 1. On calcule le polynôme caractéristique en faisant apparaître des zéros, et on en déduit que les valeurs propres sont -2, a et 2 :

$$P_a(X) = \begin{vmatrix} -2-a-X & -4-3a & a+4 \\ a+1 & 3a+1-X & +a+1 \\ a+1 & 3a-1 & 1-a-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & -4-3a & a+4 \\ 0 & 3a+1-X & -a-1 \\ 2-X & 3a-1 & 1-a-X \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2-X & -4-3a & a+4 \\ 0 & 3a+1-X & -a-1 \\ 0 & 6a+3 & -2a-3-X \end{vmatrix} = (2-X)[X^2+(2-a)X-2a]$$
$$= (2-X)(X+2)(X-a).$$

Lorsque $a \neq 2, -2$: les trois valeurs propres sont de multiplicité 1 donc l'endomorphisme est diagonalisable.

Lorsque $a = 2$:
$1 \leq \dim E_{-2} \leq \mathrm{om}(-2) = 1$,
$1 \leq \dim E_2 \leq \mathrm{om}(2) = 2$,
donc il faut étudier $\dim E_2$. On a

$$M_2 - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 6 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs colonnes sont colinéaires et la matrice n'est pas nulle, donc elle est de rang 1. Par le théorème du rang on a donc $\dim E_2 = \dim \mathrm{Ker}(f_2 - 2\mathrm{id}) = 3 - \mathrm{rg}(f_2 - 2\mathrm{id}) = 2$. L'endomorphisme est encore diagonalisable.

Lorsque $a = -2$:
$1 \leq \dim E_{-2} \leq \mathrm{om}(-2) = 2$,
$1 \leq \dim E_2 \leq \mathrm{om}(2) = 1$,
donc il faut étudier $\dim E_{-2}$. On a

$$M_{-2} + 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires et la matrice n'est pas inversible (car -2 est valeur propre), donc elle est de rang 2. Comme plus haut, on en déduit que $\dim E_{-2} = 1$, donc l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Finalement, f_a est diagonalisable si et seulement si $a \neq -2$.

Exercice 1, question 2. On a vu à la question précédente que $\dim E_{-2} = \dim E_2 = 1$. On trouve un vecteur directeur pour chacune de ces droites en résolvants des systèmes linéaires :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x+2y+2z=0 \\ -x-3y+z=0 \\ -x-7y+5z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x-3y+z=0 \\ -4y+4z=0 \\ -4y+4z=0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=z \\ x=-2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2x+2y+2z=0 \\ -x-7y+z=0 \\ -x-7y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16y=0 \\ -x-7y+z=0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x=z \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose donc $v_1 = (-2,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et on complète par exemple avec $v_3 = (1,0,0)$ — le déterminant de cette famille dans la base canonique vaut 1 donc c'est une base. On a $f_{-2}(v_1) = -2v_1$ et $f_{-2}(v_2) = 2v_2$ donc la matrice de f_{-2} dans la base (v_1, v_2, v_3) est

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

øù a, b, c sont les coordonnées de $f_{-2}(v_3)$ dans (v_1, v_2, v_3).

Exercice 1, question 3. On a vu à la question 1. que f_0 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont -2, 0 et 2. Il existe donc une base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres, et dans cette base la matrice de f_0 est diagonale avec -2, 0 et 2 sur la diagonale.

On a $f(v) = f(u_1 + u_2 + u_3) = f(u_1) + f(u_2) + f(u_3) = -2u_1 + 2u_3$,
$f^2(v) = f(-2u_1 + 2u_3) = -2f(u_1) + 2f(u_3) = 4u_1 + 4u_3$,
$f^3(v) = f(4u_1 + 4u_3) = 4f(u_1) + 4f(u_3) = -8u_1 + 8u_3$.

On calcule le déterminant de la famille $(v, f(v), f^2(v))$ dans la base (u_1, u_2, u_3) :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

La famille $(v, f(v), f^2(v))$ est donc une base.

On exprime enfin $f(v)$, $f(f(v))$ et $f(f^2(v))$ dans la base $(v, f(v), f^2(v))$, grâce aux calculs déjà effectués :
$f(v) = f(v)$, $f(f(v)) = f^2(v)$,
$f(f^2(v)) = f^3(v) = -8u_1 + 8u_3 = 4f(v)$, donc

$$\underset{(v,f(v),f^2(v))}{\mathrm{Mat}} f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.
Commençons par écrire le système matriciellement :

$$X' = MX, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 13 & -20 & -10 \\ 15 & -22 & -10 \\ -15 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

On étudie ensuite la matrice M. Les calculs donnent $P(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12 = (\lambda+2)^2(3-\lambda)$, $E_{-2} = \text{Vect }[(1, 0, \frac{3}{2}), (0, 1, -2)]$ et $E_3 = \text{Vect }[(1, 1, -1)]$. Ainsi M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On effectue alors le changement de variable correspondant dans le système différentiel :

$$\begin{aligned} X' = MX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ \Leftrightarrow Y' = DY \text{ et } Y = P^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY \text{ et } X = PY. \end{aligned}$$

Le système pour $Y = (u, v, w)$ se résoud facilement :

$$\begin{cases} u' = -2u \\ v' = -2v \\ w' = 3w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha e^{-2t} \\ v(t) = \beta e^{-2t} \\ w(t) = \gamma e^{3t}. \end{cases}$$

On revient enfin aux inconnues de départ grâce à la relation $X = PY$:

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + w(t) = \alpha e^{-2t} + \gamma e^{3t} \\ y(t) = v(t) + w(t) = \beta e^{-2t} + \gamma e^{3t} \\ z(t) = \frac{3}{2}u(t) - 2v(t) - w(t) = (\frac{3}{2}\alpha - 2\beta)e^{-2t} - \gamma e^{3t}. \end{cases}$$