Université Denis Diderot (Paris VII) 2000-2001
51MT232

Devoir sur Table n°2
Lundi 2 avril 2001

Notation : Soit D une droite, et (u_1, u_2, u_3) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 est un vecteur de D. On dit qu'une isométrie f est une **rotation** d'axe D et d'angle θ si la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Une isométrie f est une rotation si et seulement si son déterminant vaut 1.

Exercice 1 [331] On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. On considère la droite D engendrée par le vecteur $u_1 = \frac{1}{5}(3, 0, -4)$.

1. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, avec $u_2 = (0, 1, 0)$.
2. Donner les matrices dans la base (u_1, u_2, u_3) de
   (a) p, la projection orthogonale sur $D^\perp$;
   (b) s, la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$;
   (c) r, une rotation d'axe D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
3. Donner les matrices de p, s et r dans la base canonique.

Exercice 2 [332] On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2a & b & -a \\ -a & a & c \\ b & 2a & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a, b et c f est-elle une isométrie ?
2. On se place dans le cas où $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{1}{9}$ et $c = -\frac{7}{9}$.
   (a) Montrer que f est une rotation.
   (b) Déterminer son axe et le cosinus de son angle.

Exercice 3 [333] Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Soit F un sous-espace de E de dimension p, avec $1 \leq p < n$, et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Calculer le déterminant de s.