Corrigé du DST n°2
Lundi 2 Avril 2001

Exercice 1

Question 1 On a $||u_1||^2 = (3^2 + (-4)^2)/25 = 1$ donc u_1 est unitaire. De même u_2 est unitaire, de plus il est orthogonal à u_1 : $(u_1|u_2) = 3\times 0+0\times 1+(-4)\times 0 = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2) est orthonormale et on sait d'après le cours qu'on obtient une base orthonormale en prenant $u_3 = u_1 \wedge u_2$. On calcule $u_3 = (0\times 0-(-4)\times 1, -4\times 0-3\times 0, 3\times 1-0\times 0) = (4, 0, 3)$.

Question 2 u_1 est un vecteur directeur de D par définition. u_2 et u_3 lui sont orthogonaux, donc sont des vecteurs de $D^\perp$.

Par définition, p est l'unique application linéaire qui vaut 0 sur D et id sur $D^\perp$. On a donc $p(u_1) = 0$, $p(u_2) = u_2$ et $p(u_3) = u_3$, d'où la matrice de p :

$$\underset{(u_i)}{\mathrm{Mat}}\ p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, s est l'unique application linéaire qui vaut $-$id sur D et id sur $D^\perp$. On a donc $s(u_1) = -u_1$, $s(u_2) = u_2$ et $s(u_3) = u_3$, d'où la matrice de s :

$$\underset{(u_i)}{\mathrm{Mat}}\ s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin (u_1, u_2, u_3) et D vérifient les hypothèses de la définition rappelée dans l´énoncé, que l'on peut donc appliquer avec $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$:

$$\underset{(u_i)}{\mathrm{Mat}}\ r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Question 3 Pour calculer l'image des vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique, nous allons les décomposer dans la base (u_1, u_2, u_3) et utiliser la question précédente. On utilise pour cela le produit scalaire, grâce au fait que (u_1, u_2, u_3) est orthonormée :

$$\begin{aligned} e_1 &= <u_1, e_1>u_1 + <u_2, e_1>u_2 + <u_3, e_1>u_3 \\ &= \frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_3, \quad \text{et de même :} \\ e_2 = u_2, &\quad e_3 = -\frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3. \end{aligned}$$

Par linéarité on a donc $p(e_1) = 3/5\,p(u_1) + 4/5\,p(u_3)$, soit encore d'après la question précédente $p(e_1) = 4/5\,u_3 = (16, 0, 12)/25$. De même $p(e_2) = u_2 = (0, 1, 0)$ et $p(e_3) = 3/5\,u_3 = (12, 0, 9)/25$. On en déduit la matrice recherchée :

$$\operatorname*{Mat}_{(e_i)} p = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 25 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

On peut procéder exactement de même pour s ou, plus directement, utiliser la formule $s = 2p - \mathrm{id}$ que l'on démontre comme suit : soit $x \in \mathbb{R}^3$, x s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in D$ et $z \in D^\perp$, on a alors $(2p - \mathrm{id})(x) = 2p(y) + 2p(z) - y - z = 0 + 2z - y - z = -y + z = s(x)$. Matriciellement cela donne

$$\operatorname*{Mat}_{(e_i)} s = 2 \operatorname*{Mat}_{(e_i)} p - \mathrm{I}_2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} {\scriptstyle 32-25} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 24} \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 50-25} & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 24} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 18-25} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Pour r on procède comme pour p, en réutilisant les décompositions de e_1, e_2 et e_3 dans la base (u_1, u_2, u_3) :

$$\begin{aligned}
r(e_1) &= \frac{3}{5}r(u_1) + \frac{4}{5}r(u_3) = \frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\Big) \\
&= \frac{1}{25}(9,\, 0,\, -12) + \frac{1}{5}(0,\, -2\sqrt{3},\, 0) + \frac{1}{25}(8,\, 0,\, 6) = \frac{1}{25}(17,\, -10\sqrt{3},\, -6), \\
r(e_2) &= r(u_2) = \frac{1}{2}u_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_3 = \frac{1}{10}(4\sqrt{3},\, 5,\, 3\sqrt{3}) \quad \text{et} \\
r(e_3) &= -\frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\Big) \\
&= \frac{1}{25}(-12,\, 0,\, 16) + \frac{1}{10}(0,\, -3\sqrt{3},\, 0) + \frac{1}{50}(12,\, 0,\, 9) = \frac{1}{50}(-12,\, -15\sqrt{3},\, 41).
\end{aligned}$$

On peut alors remplir la matrice :

$$\operatorname*{Mat}_{(e_i)} r = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 34 & 20\sqrt{3} & -12 \\ -20\sqrt{3} & 25 & -15\sqrt{3} \\ -12 & 15\sqrt{3} & 41 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Question 1 f est une isométrie si et seulement si sa matrice M dans la base canonique est orthogonale — en effet la base canonique est orthonormale. De plus M est orthogonale si et seulement si la famille (C_1, C_2, C_3) de ses vecteurs colonnes est orthonormale. Cela fait 6 équations à écrire :

$$\begin{aligned}
||C_1||^2 = 1 &\Leftrightarrow 5a^2 + b^2 = 1 && (1)\\
||C_2||^2 = 1 &\Leftrightarrow 5a^2 + b^2 = 1 && (2)\\
||C_3||^2 = 1 &\Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 1 && (3)\\
<C_1, C_2> = 0 &\Leftrightarrow 4ab - a^2 = 0 && (4)\\
<C_1, C_3> = 0 &\Leftrightarrow ab - ac - 2a^2 = 0 && (5)\\
<C_1, C_3> = 0 &\Leftrightarrow 2a^2 + ac - ab = 0. && (6)
\end{aligned}$$

Dans ce système, (1) et (2) sont équivalentes, ainsi que (5) et (6) : on peut oublier (2) et (6). De plus a se factorise dans (4), (5) et (6). On va donc traiter deux cas :

- $a = 0$. Dans ce cas (4) et (5) sont toujours vraies, et (1) et (3) s'écrivent $b^2 = c^2 = 1$. On obtient 4 solutions du système : $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 1$.
- $a \neq 0$. Dans ce cas on peut simplifier a dans (4) et (5) qui donnent un système linéaire : $4b - a = 0$, $b - c - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4b$, $c = -7b$. En remplaçant dans (1) ou (2) on obtient la même égalité $81\, b^2 = 1$. On obtient donc deux solutions supplémentaires du systèmes : $a = 4/9$, $b = 1/9$ et $c = -7/9$ d'une part ; $a = -4/9$, $b = -1/9$ et $c = 7/9$ d'autre part.

Question 2 D'après le rappel figurant sur l'énoncé, il suffit de montrer que le déterminant de f, qui est aussi celui de M, vaut 1. C'est bien le cas :

$$\begin{aligned} \det \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 9 & 9 & 0 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -7 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\ &= \frac{1}{9^2}(8 \times 4 + 7 \times 7) = \frac{81}{9^2} = 1 \end{aligned}$$

(développement par rapport à la première ligne).

D'après le rappel de l'énoncé, un vecteur directeur u_1 de l'axe de la rotation est invariant : $r(u_1) = u_1$. On est donc amené à rechercher un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} (8x + y - 4z)/9 = x \\ (-4x + 4y - 7z)/9 = y \\ (x + 8y + 4z)/9 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y - 4z \\ -4x - 5y - 7z = 0 \\ x + 8y - 5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = z \\ x = -3z \end{array}\right. .$$

Ainsi $D = \text{Vect } (-3, 1, 1)$. Toujours d'après le rappel de l'énoncé, $\cos\theta$ est donné par la formule $\text{Tr } f = 2\cos\theta + 1$: en effet la trace de f est la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base. En particulier on peut la calculer à partir de M : $2\cos\theta + 1 = \text{Tr } M = 16/9$, d'où $\cos\theta = 7/18$.