Calcul différentiel

Exercice 1 [309] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = f\left(xye^{(x^2-y^2)}\right)\cdot$ Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de f'.
2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $h(x,y) = \left(x + f(xy), \dfrac{y}{1+x^2}\right)\cdot$ Montrer que la fonction h est de classe C^1 et calculer la matrice jacobienne de h en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 [310] Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(t^2, t^4, e^t)$. Montrer que φ est dérivable. Pour tout nombre réel t, exprimer $\varphi'(t)$ au moyen des dérivées partielles de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = f(x\sin(y), xy^2, x+y^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 3 [311] Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^3y + \cos(xz)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = f(x^2+y^2, xy, x-y)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 4 [312] Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f.
2. Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{x^x}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 5 [313] Le but de cet exercice est de chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (*)$$

1. Soient g et h deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Montrer que f est de classe C^2 et que f est solution de $(*)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui vérifie $(*)$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (b) Montrer qu'il existe des fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(x,y) = g(x) + h(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 [314] Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (x+1)e^x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \qquad (*)$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = h(y + xe^x)$. Montrer que f est de classe C^1 et que f est solution de $(*)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie $(*)$. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(0,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction h est de classe C^1.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(t) = f(x, t - xe^x)$.
   (c) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = h(y + xe^x)$.
3. Donner toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 7 [315] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Montrer que les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

   existent. Les calculer.
3. La fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 8 [316] Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 9 [317] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$.

1. Calculer les dérivées partielles de f et trouver les points critiques de f.
2. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un point critique de f. Posons $a = f(x_0, y_0)$. Soit L la ligne de niveau a de f. Ecrire l'équation de la tangente à L au point (x_0, y_0).
3. Soit a un nombre réel.
   (a) Etudier la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x + a$.
   (b) Dessiner les différentes allures de la ligne de niveau a de la fonction f.

Exercice 10 [318] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Pour tout nombre réel a, notons L_a la ligne de niveau a de la fonction f.

1. Trouver les points critiques de f.
2. Soit a un nombre réel. Supposons que L_a n'est pas vide et que $a \neq 0$ et $a \neq -8$. Montrer que la courbe L_a a une tangente en tout point.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) + 8 = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2$.
4. En déduire que la fonction f admet un minimum m et préciser les points (x,y) en lesquels ce minimum est atteint.
5. Montrer que les lignes de niveau de f sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 [319] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy(x^2+y^2+xy-1)$.

1. Que valent $f(y,x)$ et $f(-x,-y)$? Que peut-on en déduire sur les points critiques de f ?
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema locaux de f.
4. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 12 [320] Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ (b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
(c) $f(x,y) = (4x-3y)e^{-(x^2+y^2)}$ (d) $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$.

Exercice 13 [321] Soit S la surface d'équation $z = x - 2(x^2+y^2)^2$, c'est-à-dire soit

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = x - 2(x^2+y^2)^2\}.$$

1. Soit $(a,b,c) \in S$. Ecrire l'équation du plan tangent à S au point (a,b,c). En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?
2. Montrer qu'au point $(0,0,0)$, la surface est en dessous de son plan tangent.

Exercice 14 [322] Soit S la surface d'équation $z = (1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2$, c'est-à-dire soit

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = (1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2\}.$$

1. En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?
2. En chacun de ces points, quelle est la position de S par rapport à son plan tangent ?

Exercice 15 [323] Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x,y,z) = z^2(1+xy) + xy$ (b) $f(x,y,z) = (x+y)e^{x+y-z^2}$.