Diagonalisation, trigonalisation

Exercice 1 [208] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit a un vecteur de E et f un endomorphisme de E. Soit $g : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$g(x) = f(x) + a \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f. Montrer qu'il existe un unique vecteur $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) = x_0$.

Exercice 2 [209] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{C}$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de f.
2. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 [210] Soit n un entier positif, et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes nul ou de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit P un élément de E. Montrer que $(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' \in E$.
2. Soit f l'application de E définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E, et écrire sa matrice dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 4 [211] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 5 [212] Soient f_1 et f_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 5 \\ -30 & -28 & -10 \\ 30 & 30 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ces endomorphismes sont diagonalisables.

Exercice 6 [213] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Posons $v = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 7 [214] Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice 8 [215] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de chaque sous-espace propre de f.
2. Montrer qu'il existe un vecteur $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_2) \neq -e_2$ et $(f + \mathrm{id}3)^2(e_2) = 0$.
3. Soit e_1 un vecteur propre de f pour la valeur propre -1, soit e_2 un vecteur tel que $f(e_2) \neq -e_2$ et $(f + \mathrm{id}3)^2(e_2) = 0$ et soit e_3 un vecteur tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est triangulaire supérieure, et préciser les coefficients diagonaux de cette matrice.
4. Soit P le plan d'équation $y = 2x$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Trouver une base de P.
   (b) Montrer que $f(P) = P$.
   (c) Soit $g : P \longrightarrow P$ l'application linéaire définie par $g(x) = f(x)$ pour tout vecteur x de P. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice 9 [216] Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) de nombres réels telles que

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de a les suites des coefficients de la matrice A^n sont-elles bornées ? Sont-elles convergentes ?
4. Trouver une base du sous-espace vectoriel E_b des suites bornées de E.

Exercice 10 [217] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Montrer que f est trigonalisable. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
3. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 [218] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -15 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de chaque sous-espace propre. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Exercice 12 [219] Soient a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de chaque sous-espace propre de f.
2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 13 [220] Soient a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3a \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. Montrer que 1 est valeur propre de f.
2. On suppose que $a \neq 1$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $a > 1$.
3. On suppose que $a = 1$.
   (a) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
   (d) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 [221] On note V l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui ont une limite finie en $+\infty$. Pour $f \in V$ on note $T(f)$ la fonction $(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x+1))$. Ainsi $T(f)(x) = f(x+1)$.

1. Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et la multiplication par un scalaire. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ définit une application linéaire de V dans V.
2. Vérifier que la formule suivante, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, définit une fonction $f \in V$:
$$f(x) = \frac{x - \mathrm{E}(x) - 2}{2^{\mathrm{E}(x)+1}}.$$
Montrer que f est vecteur propre de T. Quelle est la valeur propre associée ?
3. Soit λ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé. En étudiant la suite $(f(x+n))_n$ pour un réel x bien choisi, montrer que $\lambda \in]-1,1]$.
4. Soit $\lambda \in]-1,1]$. Construire, par exemple en s'inspirant de 2., une fonction $f \in V$ telle que $T(f) = \lambda f$. Quel est l'ensemble des valeurs propres de T ?

Exercice 15 [222] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On se propose de chercher les matrices $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^3 = A$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, et $g \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^3 = f$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres pour g. Quelles possibilités a-t-on pour les valeurs propres associées ?
3. Résoudre l'équation $B^3 = A$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Calculer la somme et le produit des solutions.

Exercice 16 [223] On pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $M(a)$. Pour quelle valeur de a $M(a)$ admet-elle 2 comme valeur propre ? Montrer que $M(a)$ est alors diagonalisable.
2. Déterminer une base de vecteurs propres de $M(a)$ lorsque 2 en est valeur propre.

Exercice 17 [224] Trouver au moins une matrice $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telle que
$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 [225] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 3 \\ -1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$
Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.