Université Denis Diderot (Paris VII) 2000-2001
51MT232 groupe M4

Espaces euclidiens

Exercice 1 [288] Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé à q. Orthonormaliser la base canonique selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 2 [289] Soient n un entier positif et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$B(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt \quad \text{pour tous polynômes } P, Q \in E.$$

1. Montrer que B est un produit scalaire .
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in E$ tel que pour tout polynôme P de E on ait
$$\int_0^1 H(t)P(t)dt = P'(0).$$
3. On suppose que $n = 2$ et on munit E du produit scalaire B.
   (a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.
   (b) Calculer le polynôme H.

Exercice 3 [290] On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 2y = 0$. Soient p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur D, et s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à D.

1. Ecrire les matrices de p et de s dans la base canonique.
2. Trouver toutes les droites Δ de $\mathbb{R}^2$ telles que les droites Δ et $s(\Delta)$ sont orthogonales.

Exercice 4 [291] On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(3, 1, 2)$. Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D ?

Exercice 5 [292] Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 8xy + 8xz - 6yz \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé à q. Quelle est la matrice dans la base canonique, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$?

Exercice 6 [293] Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Quelle est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à P ?

Exercice 7 [294] On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$u_1 = (2, 1, 0, 2) \qquad u_2 = (0, 1, 0, 1) \qquad u_3 = (2, 1, 3, 1) \qquad u_4 = (1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3, u_4) selon le procédé de Gram-Schmidt.
3. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2. Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P.

Exercice 8 [295] On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, -2, 2)$.

1. Trouver une équation de $D^\perp$.
2. Trouver une base orthonormée directe dont le premier vecteur appartient à D.
3. Quelles sont les matrices dans la base canonique de
   (a) la symétrie orthogonale par rapport à D ?
   (b) la rotation d'axe D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$?
   (c) la rotation d'axe D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$?

   Pour les deux dernières questions, le plan $D^\perp$ est orienté par le choix du vecteur unitaire
   $$e = \frac{1}{\|(1, -2, 2)\|}(1, -2, 2).$$

Exercice 9 [296] On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soient a, b, c, d des nombres réels et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & c & a \\ a & a & d \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a, b, c, d la matrice A est-elle orthogonale ?
2. Pour quelles valeurs de a, b, c, d l'endomorphisme f est-il une symétrie orthogonale par rapport à un plan ? Dans ce cas, préciser par rapport à quel plan.
3. Pour quelles valeurs de a, b, c, d l'endomorphisme f est-il une rotation ? Dans ce cas, préciser l'axe et l'angle de f.

Exercice 10 [297] On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et on note $\langle u|v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u, v de $\mathbb{R}^2$. Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 \qquad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Quelle est la matrice A de q dans la base canonique ?
2. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A.
   (a) Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ on a $q(u) = \langle f(u)|u\rangle$.
   (b) Trouver une base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. Calculer $q(au_1 + bu_2)$ pour tous nombres réels a et b.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ qui est orthogonale pour q.
4. Dessiner la ligne de niveau 4 de la fonction q.

Exercice 11 [298] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (que l'on munit du produit scalaire usuel) dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f a une unique valeur propre que l'on déterminera.
3. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 est vecteur propre de f.
4. Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?
5. Montrer qu'il existe une unique rotation r et une unique symétrie orthogonale s par rapport à un plan telles que $f = r \circ s = s \circ r$. Préciser l'axe et la mesure de r.

Exercice 12 [299] Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que pour tous $(u, v) \in E$, on a l'égalité

$$2\langle u, v\rangle = ||u + v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2.$$

2. En déduire que pour tous $(u, v) \in E$, on a l'égalité (dite *égalité de la médiane*) :

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right).$$

3. Montrer le théorème suivant :
   Théorème de Pythagore : Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.