Intégrales à paramètre

Exercice 1 [324] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)dt$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1. Pour tout nombre réel x, exprimer $f'(x)$ comme intégrale à paramètre.
2. Montrer que la fonction f est de classe C^2.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 2 [325] Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2\cos^2 t + \sin^2 t)dt.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Soit $x > 0$ tel que $x \neq 1$. Calculer $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 [326] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}dt.$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a - \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'on a $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Exercice 4 [327] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt.$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{x}{2}y$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 [328]

1. Montrer que pour tout réel x on a $\displaystyle\lim_{t \mapsto 0} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = x$. En déduire que l'application φ : $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$ pour $t > 0$ et $\varphi(x, 0) = x$ est continue.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}dt$ est convergente pour tout x réel. On note $F(x)$ cette intégrale.
3. Montrer que la fonction F ainsi définie est impaire et continue.
4. Montrer que la fonction F est de classe C^1.
5. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$. On pourra utiliser la décomposition suivante : $\dfrac{1}{(1+T)(1+aT)} = \dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+T} - \dfrac{a}{1+aT}\right).$
6. Calculer $F(0)$ et déduire de ce qui précède une expression explicite de la fonction F (on pourra faire le calcul d'abord pour $x > 0$).