Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 [205] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est-il inversible ?
3. Trouver une base de $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
4. Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
5. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition
$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$
6. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{im}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.

Exercice 2 [206] Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelle est la dimension de $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$?
2. On suppose que $a \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, où λ est un nombre complexe.

Exercice 3 [207] Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a existe-t-il un réel λ tel que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ?
2. On suppose $a < 0$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et un nombre $b > 0$ tels que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$