Séries entières

Exercice 1 [249] Calculer le rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$(1)\frac{z^n}{n\pi^n} \qquad (2)(\log n)z^n \qquad (3)\frac{n^4}{n!}z^n \qquad (4)\frac{z^n}{2^{3n-2}} \qquad (5)n^k z^n \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2 [250] Considérons la série de fonctions de terme général $u_n(x) = (\cos \frac{n\pi}{3})x^{2n+1}$.

1. Montrer que c'est une série entière et l'écrire sous la forme $a_n x^n$.
2. Montrer que son rayon de convergence R est non nul.
3. Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos \frac{n\pi}{3})x^{2n}$. Calculer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Exercice 3 [251] Soit deux séries entières de termes généraux $a_n x^n$, $b_n x^n$ et de rayons de convergence respectifs R et S.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n^p x^n$, où p est un entier relatif fixé, est R^p.
2. On pose $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_n x^n$?
3. Soit $r < R$ un réel positif, montrer que $n^2 a_n r^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On pourra comparer cette suite à la suite $a_n s^n$ où $s \in]r, R[$.
4. En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $n^2 a_n x^n$.

Exercice 4 [252] Donner le rayon de convergence R des séries entières de terme général ci-dessous, et calculer leur somme dans l'intervalle $]-R, R[$.

$$(1)n^2 x^n \qquad (2)\frac{n^2+1}{n!}x^n \qquad (3)(-1)^{n+1}n(n+2)x^{n+2} \qquad (4)\frac{x^n}{(2n)!}$$

Exercice 5 [253] Développer en série entière au point 0 les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue :

$$(1)f_1(x) = \log\left(\frac{1+2x^2}{1-x^2}\right) \qquad (2)f_2(x) = \log(x+a) \ \ a > 0 \qquad (3)f_3(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

$$(4)f_4(x) = e^x \cos x \qquad (5)f_5(x) = (\cos x)^3 \qquad (6)f_6(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t}dt$$

Exercice 6 [254]

1. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n+1}$ converge.

   Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n+1}$.
2. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$. En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Exercice 7 [255]

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{x^n}{n^2}$ est-elle convergente ?
2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, pour tout $x \in [-1,1]$. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Calculer la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f(1-x) + (\log x)\log(1-x)$.
4. Démontrer la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = (\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}n^2}$.

Exercice 8 [256]

1. Montrer qu'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.
2. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0, et déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.
3. Calculer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 9 [257] Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f non nulle développable en série entière au point 0, telle que $f'(x) = f(ax)$? Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 10 [258] Trouver toutes les fonctions développables en série entière au point 0 qui sont solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - 2y = 0$. Préciser le rayon de convergence des séries entières obtenues et expliciter leur somme.

Exercice 11 [259] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que f est développable en série entière au point 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$.
3. En déduire le développement en série entière au point 0 de f.
4. Démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}$.