## Séries de fonctions

**Exercice 1** [260] Pour tout entier strictement positif $n$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.

**Exercice 2** [261] Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n} \cdot$$

1. Soit $a$ un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a, a]$. En déduire que la série de fonctions de terme général $f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3** [262] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

La série de fonctions de terme général $f_n$ est-elle simplement convergente sur $[0, +\infty[$ ? normalement convergente sur $[0, +\infty[$ ? et sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ ?

**Exercice 4** [263]

1. Montrer que pour tout $x > 0$ la série de fonctions de terme général $\dfrac{1}{n(1+nx)}$ est convergente.

   Définissons alors $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \cdot$
2. Montrer que la fonction $f$ est positive et décroissante. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \cdot$ Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, $S_n(x) \leq f(x)$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0} f(x) = +\infty$.

**Exercice 5** [264] Pour tout $n > 0$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $F_n$ la primitive de $f_n$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

   On définit alors $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que la série de fonctions de terme général $F_n$ est normalement convergente sur le segment $[0, x]$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Pour tout $x > 0$ calculer $F_n(x)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.
4. Montrer que la série de fonctions de terme général $F_n$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.
5. Démontrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

**Exercice 6** [265] Soit la fonction $\zeta : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Montrer que pour tout $a > 1$ la série de fonctions de terme général $f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. Est-elle normalement convergente sur $]1, +\infty[$ ?
2. Montrer que la fonction $\zeta$ est continue et décroissante. Calculer $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \zeta(x)$.
3. Démontrer que pour tout $x > 1$ on a $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

   En déduire que $\displaystyle\lim_{x \mapsto 1} (x-1)\zeta(x) = 1$.
4. Montrer que la fonction $\zeta$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

**Exercice 7** [266] Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.

   Soit alors $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que $f$ est une fonction paire et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n'$ est normalement convergente sur $[-a, a]$. En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ posons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   Montrer que $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.