Université Denis Diderot (Paris VII) — 2000-2001
51MT231 — groupe M4

Quelques exercices sur les séries numériques

Exercice 1 [238] Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\dfrac{1}{C_{2n}^n}$ **(b)** $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ **(c)** $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ **(d)** $\left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$

(e) $\ln\left(n\cosh(\dfrac{1}{n})\sin(\dfrac{1}{n})\right)$ **(f)** $k^{\ln(n)} \quad k\in\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 [239] Pour tout entier $n\geq 1$, posons

$$u_n=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}.$$

1. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. Montrer que la suite nu_n est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 3 [240] On pose

$$u_n=\ln\left|1+\frac{i}{n}\right|+i\arg\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4 [241] Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\dfrac{n2^n}{(2+i)^n}$ **(b)** $n(n+1)a^n \quad a\in\mathbb{C}$ **(c)** $\dfrac{1}{n}\left(i^{2n}+\dfrac{i}{n}\right)$

Exercice 5 [242] Soit u_0 un nombre réel strictement positif, et soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1}=u_n-\frac{u_n}{1+u_n}\qquad\text{pour tout } n\geq 0.$$

1. Montrer que l'on a $0<u_{n+1}<u_n$ pour tout n.
2. Montrer que la série de terme général u_n-u_{n+1} est convergente.
3. Montrer que pour tout n, on a
$$\frac{u_n}{1+u_0}\leq\frac{u_n}{1+u_n}.$$
En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 6 [243] Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

1. Montrer que l'on a $0 \leq u_n \leq f(n) - f(n+1)$ pour tout n. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
2. Montrer que la suite $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$ est convergente. En déduire que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1.$$

Exercice 7 [244] Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives. On pose $w_n = \max\{u_n, v_n\}$. Montrer que la série de terme général w_n est convergente si et seulement si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes.

Exercice 8 [245] Déterminer la nature des séries suivantes ($\mathrm{E}(\cdot)$ désigne la partie entière) :

(a) $(n^2+1)^{-n}$ **(b)** $\dfrac{\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) - \mathrm{E}(\sqrt{n})}{n^\alpha}$ **(c)** $\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$

(d) $\dfrac{2}{3}\sin(n)\dfrac{\mathrm{ch}n}{\mathrm{ch}(n+1)}$ **(e)** $\dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$ **(f)** $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ **(g)** $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$

Exercice 9 [246]

1. Montrer que l'intervalle $[k\pi + \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}]$ contient au moins un entier. En déduire qu'on ne peut pas avoir $(\sin n)^2 \leq \frac{1}{2}$ pour trois entiers n consécutifs.
2. On pose $u_n = \frac{(\sin n)^2}{n}$. Montrer que $u_{3i} + u_{3i+1} + u_{3i+2} \geq \frac{1}{6i+4}$ pour tout $i \geq 1$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 10 [247] On pose

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$$

.

1. Montrer que l'on a $u_{n+1} = u_n\sqrt{n} - u_{n+1}\sqrt{n+1}$.
2. En déduire que la série de terme général u_n converge. Quelle est sa somme ?

Exercice 11 [248] On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

1. Montrer que $(|u_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. Montrer que $\sqrt[2p]{(2p)!} \geq \sqrt{(p+1)}$.
3. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.