Université Denis Diderot (Paris VII) — 2000-2001

51MT231 — groupe M4

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Dans tous ces exercices, on note les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en colonnes.

Exercice 1 [267] Soit f_a l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2a-1 & 3-2a & 4a-3 \\ 1 & -1 & 2a+1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
2. Supposons que $a = 1$.
   (a) Trouver un vecteur $u_3 \notin \ker(f_1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Montrer que $u_2 = (f_1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u_3) \in \ker(f_1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, et compléter u_2 en une base (u_1, u_2) de $\ker(f_1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Justifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f_1 dans cette base.
3. Supposons $a = 0$, et soit (u_1, u_2, u_3) une base de vecteurs propres de f_0. Soit $w = u_1+u_2+u_3$. SANS CALCULS, Montrer que $(w, f(w), f^2(w))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f dans cette base

Exercice 2 [268] Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & 8x - 18y + 27z \\ y' = & -3x + \frac{7}{2}y - 6z \\ z' = & -4x + 7y - 11z. \end{cases}$$

Exercice 3 [269] Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & 12x - 10y + 5z \\ y' = & 10x - 8y + 5z \\ z' = & -10x + 10y - 3z. \end{cases}$$

Exercice 4 [270] Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & x - 3y + 4z \\ y' = & 4x - 7y + 8z \\ z' = & 6x - 7y + 7z. \end{cases}$$

Exercice 5 [271]

1. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & -x+2y+3z \\ y' = & 2x+2y+6z \\ z' = & x+2y+z. \end{cases}$$

2. Considérons le système différentiel suivant :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = & -x+2y+3z+1 \\ y' = & 2x+2y+6z-6t-1 \\ z' = & x+2y+z+1. \end{cases}$$

   (a) Trouver deux vecteurs V et W de $\mathbb{R}^3$ tels que la fonction $S_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

   $$S_0(t) = tV + W \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

   est solution du système différentiel $(*)$.

   (b) Résoudre le système différentiel $(*)$.

Exercice 6 [272] Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & 7x-4y+2z \\ y' = & 13x-6y+6z \\ z' = & -3x+2y. \end{cases}$$