UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT (PARIS VII) 2000-2001
51MT232

Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 [300] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. On considère l'ensemble X de $\mathbb{R}^2$ défini par $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ ou } y > 0\}$. Soit $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$.

1. Dessiner X.
2. Soit (x_0, y_0) un point de X. Montrer qu'il existe une boule ouverte contenant (x_0, y_0) et contenue dans X.
3. X et Y sont-ils ouverts ? fermés ?

Exercice 2 [301] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. On considère l'ensemble X de $\mathbb{R}^2$ défini par $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0\}$. Soit $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$.

1. Dessiner X.
2. Soit $u_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de X convergente dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que la suite u_n converge dans X.
3. X et Y sont-ils ouverts ? fermés ?

Exercice 3 [302] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ quelconque.

1. On note $X + U = \{x + u \ / \ x \in X, \ u \in U\}$. Montrer que $X + U$ est ouvert.
2. Soit F et G deux fermés de $\mathbb{R}^n$, $F + G$ est-il nécessairement fermé ?
3. On note $C(U) = \{\lambda u \ / \ u \in U, \ \lambda > 0\}$. Montrer que $C(U)$ est ouvert.
4. Montrer que $C(U) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si $0 \in U$.

Exercice 4 [303] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont ouvertes ? Lesquelles sont fermées ? Lesquelles sont bornées ?

- **(a)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 2y^2 = 13\}$
- **(b)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1, \ y \leq 2, \ x - y \geq 0\}$
- **(c)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 > 0\}$
- **(d)** $\{(\cos t, \sin t) / t \in \mathbb{R}\}$
- **(e)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$
- **(f)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2\}$
- **(g)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0,0)$.

Exercice 5 [304] Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

1. Montrer que $q(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $N(u) = \sqrt{q(u)}$. Montrer que N est une norme.

Exercice 6 [305] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique, et $\mathbb{R}$ de la norme usuelle. Soit n un entier positif, et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1. On suppose que $n = 1$. Montrer que la fonction f n'est pas continue.
2. On suppose que $n > 1$. Montrer que la fonction f est continue (on pourra vérifier et utiliser l'inégalité $xy \leq 1/2(x^2+y^2)$).

Exercice 7 [306] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique, et $\mathbb{R}$ de la norme usuelle. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.
Existe-t-il une fonction continue $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f ?

Exercice 8 [307] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y^2, x+y)$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f n'est pas injective.
3. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 1/2\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > -1/4\}$.
   (a) Montrer que $V = f(U)$.
   (b) Soit $g : U \longrightarrow V$ l'application définie par $g(x,y) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in U$. Montrer que l'application g est bijective.
   (c) Soit $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $h(x,y) = g^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in V$. Montrer que l'application h est continue.

Exercice 9 [308] On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la norme $|| \, ||_\infty$.

1. Soit Δ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Trouver une suite de matrices (A_n) telle que $A_n \in \Delta$ pour tout n et qui a pour limite la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Trouver une suite de matrices (B_n) telle que $B_n \in M_2(\mathbb{R})$, $B_n \notin \Delta$ pour tout n et qui a pour limite la matrice I_2.
   (c) La partie Δ est-elle ouverte ? Est-elle fermée ?
2. Soit J l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui ont deux valeurs propres réelles distinctes.
   (a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient-elle à J ?
   (b) Montrer que J est une partie ouverte de $M_2(\mathbb{R})$.
3. Soit K l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui ont 1 et 2 pour valeurs propres.
   (a) Soient a, b, c, d quatre réels. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à K si et seulement si $a + d = 3$ et $ad - bc = 2$.
   (b) Montrer que K est une partie fermée de $M_2(\mathbb{R})$.
   (c) Est-ce que K est une partie compacte de $M_2(\mathbb{R})$?