Problème 1

1. Etudier la convergence des séries suivantes selon les valeurs du paramètre réel x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+nx)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

2. Montrer (avec la formule de Taylor) que pour tout x dans $[0,1]$ et pour tout n, on a

$$\left| e^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x pour tout x dans $[0,1]$.

3. On considère la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

On pose $A_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \sin(k)$. Montrer que pour tout n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) A_k + \frac{A_n}{n+1}$$

Etablir que pour tout p, $A_p = \dfrac{\sin((p+1)/2)\sin(p/2)}{\sin(1/2)}$. En déduire que A_p est borné indépendemment de p.

Montrer que la série suivante converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) A_k \right|.$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ converge.