Université Denis Diderot (Paris VII) 2001-2002
MT231

Devoir Surveillé n°1

Exercice 1 On pose, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b_n = (-1)^n \frac{1+n}{8+n^2}$$

$$c_n = \left(\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{n\ln n} \qquad d_n = \frac{(\sin n)^2}{n}$$

$$e_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$$

1. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?
2. La série de terme général b_n est-elle convergente ? absolument convergente ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général c_n ? (On pourra chercher un réel α tel que $\lim n^\alpha c_n = 1$.)
4. (a) Montrer que l'intervalle $[k\pi + \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}]$ contient au moins un entier. En déduire qu'on ne peut pas avoir $(\sin n)^2 < \frac{1}{2}$ pour trois entiers n consécutifs.
   (b) Montrer que $d_{3i} + d_{3i+1} + d_{3i+2} \geq \frac{1}{6i+4}$ pour tout $i \geq 1$.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général d_n.
5. (a) Montrer que $e_{n+1} = e_n\sqrt{n} - e_{n+1}\sqrt{n+1}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ diverge.
   (c) En déduire que la série de terme général e_n converge. Quelle est sa somme ?

Exercice 2 Soit u_n le terme général d'une série réelle convergente. On pose $v_n = nu_n$.

1. La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas nécessairement $u_n = o(\frac{1}{n})$.
2. On suppose que la suite (v_n) a une limite. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.
3. On suppose maintenant que la suite (u_n) est décroissante et positive.
   (a) Montrer que $nu_{2n} \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (v_{2n}), puis (v_{2n+1}), tend vers 0.
   (c) Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 3 Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$. On note $f(x)$ sa somme.
2. Soit a un réel strictement positif fixé. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie au 1 est dérivable. Calculer sa dérivée.
4. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x > 0$.