DST2

Mardi 27 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel $x \geq 0$, posons

$$f_n(x) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{1+n^2x}\right).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3. Pour tout nombre réel $x > 0$, posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \operatorname{Log} 2$.

Exercice 2. Calculer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \frac{n^2}{1+3^n}\, x^n \quad \text{et} \quad \sum \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 3. Considérons l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0\,. \tag{1}$$

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Pour tout $x \in]-R, R[$, posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f développable en série entière, solution de (1), telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

3. Quel est le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$?

4. Soit f la fonction définie en **2**. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle.