DM3

Exercice 1 :

1. Pour chacune des matrices M suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

   (a) montrer que M est diagonalisable, et donner des matrices P, D telles que :
      i. D est une matrice diagonale.
      ii. P est inversible.
      iii. $M = PDP^{-1}$.

   (b) Résoudre le système différentiel linéaire :

$$X' = MX.$$

2. Montrer que chacune des matrices M suivantes n'est pas diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Dans cette exercice, on étudie les matrices $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un entier naturel r vérifiant $N^r = 0$.

Dans ce cas, on dit que N est *nilpotente.*

1. Soit N une matrice nilpotente de taille n, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui correspond dans la base canonique.

   (a) Montrer que $det(N) = 0$.
   En déduire qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $u(x) = 0$.

   (b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad N' \quad} \\ 0 & \end{array}\right)$$

   où N' est de taille $n-1$.

   (c) Montrer que la matrice N' est nilpotente.

   (d) En itérant le raisonnement précédent, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit N une matrice de taille n. Déduire de 1 l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (a) N est nilpotente.
   (b) $N^n = 0$.
3. Soit N une matrice de taille n, et $\chi_N(\lambda)$ son polynôme caractéristique.
   (a) En utilisant 1) d), montrer que si N est nilpotente, $\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n$.
   (b) Reprenons les notations de 1. En utilisant le même raisonnement que dans le 1, montrer que si $\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n$, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme
   $$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   En déduire l'équivalence des conditions suivantes :
      i. N est nilpotente.
      ii. $\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n$.