DM3

correction

Exercice 1 :

1. (a) $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
Comme les valeurs propres de M sont simples, M est diagonalisable.
Vecteur propre associé à la valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vecteur propre associé à la valeur propre 2 : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ conviennent.
Alors, le système différentiel linéaire se résoud comme suit :

$$X' = MX \ (E)$$
$$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow \begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY \ (E'). \end{cases}$$

Dès lors,

i. les solutions de (E') sont de la forme $Y = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{2t} \end{pmatrix}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

ii. les solutions de (E) sont de la forme $X = \begin{pmatrix} -2ae^t - 3be^{2t} \\ ae^t + be^{2t} \end{pmatrix}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique : $-(X^3 - 6X^2 + 11X - 6) = -(X-1)(X-2)(X-3)$.
Comme les valeurs propres de M sont simples, M est diagonalisable.
Les matrices $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ conviennent.
Les solutions du système différentiel $X' = MX$ sont de la forme $P = \begin{pmatrix} -3ae^t - ce^{3t} \\ 3ae^t + be^{2t} + ce^{3t} \\ ae^t + be^{3t} \end{pmatrix}$
pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique : $-(X^3 - 7X^2 + 11X - 5) = -(X-1)^2(X-5)$.
Vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vecteur propre associé à la valeur propre 5 : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La dimension des sous-espaces propres de M est donc égale à la multiplicité de chaque valeur propre, ce qui monre que M est diagonalisable.

De plus, les matrices $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ conviennent.

Enfin, les solutions du système différentiel $X' = MX$ sont de la forme

$P = \begin{pmatrix} -2ae^t - 3be^t - ce^{5t} \\ ae^t + ce^{5t} \\ be^t + ce^{5t} \end{pmatrix}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

2. (a) $M = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

   Polynôme caractéristique : $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

   Sous-espace propre associé à la valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

   La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc strictement inférieure à la multiplicité de celle-ci, ce qui montre que M n'est pas diagonalisable.

   (b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Polynôme caractéristique : $-(X^3 - 5X^2 + 7X - 3) = -(X - 1)^2(X - 3)$.

   Vecteurs propres associés à la valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

   A nouveau, comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est strictement inférieure à la multiplicité de celle-ci, M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 :

1. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0$.

   (a) D'après le choix de r, $\det(N^r) = 0 \Leftrightarrow r.\det(N) = 0$, donc $\det(N) = 0$ car $r \neq 0$.

   On en déduit que N n'est pas inversible, et donc $\mathrm{Ker}(N) \neq \{0\}$. Il suffit donc de considérer $x \in \mathrm{Ker}(N) - \{0\}$.

   (b) Comme x est non nul, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (x) en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Comme $u(x) = Nx = 0$, la matrice de u dans cette base est de la forme attendue.

   (c) Par définition du produit de matrice,

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{N'} \\ 0 & \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{(N')^r} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

   Dès lors, par définition de N, $(N')^r = 0$ ce qui montre que N' est nilpotente.

(d) On pose $x_1 = x$. Comme N' est nilpotente, il existe un vecteur $x' = \begin{pmatrix} x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $N'x' = 0$. Considérant la base obtenue dans 1(b), on pose $x_2 = x'_2.e_2 + ... + x'_n.e_n$. Dès lors,

$$u(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & & * & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{N'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \boxed{N'x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, (x_1, x_2) est libre. On peut donc le compléter en une base $(x_1, x_2, e'_3, ..., e'_n)$. Dans cette nouvelle base, la matrice de u est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \boxed{N''} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

où N'' est une matrice carré de taille $n-2$. On démontre comme dans 1(c) que $(N'')^r = 0$, et on peut donc itérer le raisonnement avec cette matrice. Comme la taille de la matrice obtenue diminue, ce procédé termine, et on ontient donc une base $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que la matrice de u dans cette base est de la forme attendue.

2. Il est évident que $(b) \Rightarrow (a)$. Supposons réciproquement que N est nilpotente. La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est par définition N. D'après le 1(d) il existe une base $(x_1, ..., x_n)$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire avec des 0 sur la diagonale). Si P est la matrice de passage de la base canonique à $(x_1, ..., x_n)$, on a donc $N = PTP^{-1}$ et $N^n = PT^nP^{-1}$. Or, par définition, du produit de matrice,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = 0$$

car T est de taille n. On déduit donc de ce qui précède que $N^n = 0$, ce qui montre la réciproque.

3. (a) Soit $\chi_T(\lambda)$ le polynôme caractéristique de T. Il est immédiat par définition de T que $\chi_T(\lambda) = (-\lambda)^n$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \chi_N(\lambda) &= \det(N - \lambda.Id) = \det(PTP^{-1} - \lambda.Id) \\ &= \det(PTP^{-1} - \lambda.PP^{-1}) = \det\left(P(T - \lambda.Id)P^{-1}\right) = \det(T - \lambda.Id) = \chi_T(\lambda). \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que les déterminants respectifs de deux matrices semblables sont égaux. Ceci conclut.

(b) Supposons que $\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n$. En particulier χ_N est scindé, donc N est trigonalisable. En outre la seule racine de χ_N est 0, donc la seule valeur propre de N est 0. Ainsi, modulo un changement de base, N est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. Comme on l'a déjà vu à la question 2, cela implique que $N^n = 0$, donc que N est nilpotente.