UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT
DEUG MIAS INFO MT231

2002-2003
GROUPE I23

Devoir surveillé n°1

vendredi 18 octobre

Exercice 1 Questions de cours.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?
2. Que peut-on dire d'une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées ?
3. Enoncer le critère de D'Alembert.
4. Enoncer le théorème des séries alternées.

Exercice 2 Déterminer la nature des séries $(\sum a_n)$, $(\sum b_n)$ et $(\sum c_n)$ données par

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad b_n = \ln\left(\cos\left(2^{-n}\right)\right), \quad c_n = \tan\left(\frac{(-1)^n}{\ln n}\right).$$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. On appelle (S_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, et (T_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général v_n.

1. Démontrer l'égalité $T_n = S_{2n+1}$, pour tout n. En déduire que
$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum v_n\right) \text{ converge.} \tag{1}$$
2. On suppose que $u_n = (-1)^n$ pour tout n. Déterminer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$. La réciproque de l'implication (1) est-elle vraie en général ?
3. On suppose que la série de terme général v_n converge et que les u_n sont tous positifs.
   (a) Montrer que la suite (S_{2n+1}) est majorée.
   (b) Montrer que $S_{2n} \leq S_{2n+1}$, pour tout n.
   (c) En déduire que la série de terme général u_n converge.

Barême et temps de travail indicatifs :
- Exercice 1 : 5 points, 10 minutes.
- Exercice 2 : 7,5 points, 30 minutes.
- Exercice 3 : 7,5 points, 30 minutes.