Université Denis Diderot — 2002-2003

DEUG MIAS Info MT231 — Groupe I23

Devoir surveillé n°1
Corrigé

Exercice 2

1. La série $(\sum a_n)$ est à termes positifs, appliquons le critère de Cauchy. On a $\sqrt[n]{a_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2/2$. Comme $\lim \ln \sqrt[n]{n} = \lim(\ln n)/n = 0$, on a $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ donc $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/2$. D'après le critère de Cauchy, la série $(\sum a_n)$ est convergente.
2. Au voisinage de 0 on a $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ et $\ln(1+x) \sim x$, donc $\ln(\cos x) \sim -x^2/2$. Comme 2^{-n} tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que b_n est équivalent à $b'_n = -2^{-2n}/2$. En appliquant le théorème de comparaison à $(\sum -b_n)$ et $(\sum -b'_n)$, qui est à termes positifs, on voit que les séries $(\sum b_n)$ et $(\sum b'_n)$ sont de même nature. Or la deuxième est convergente car c'est un multiple de la série géométrique de raison $1/4 \in [0,1[$.
3. La fonction tangente étant impaire, on a $c_n = (-1)^n c'_n$, avec $c'_n = \tan(1/(\ln n))$. Pour $n \geq 3$ on a $\ln n \geq 1$ donc $1/(\ln n) \in [0,1] \subset [0,\pi/2[$. En particulier on a alors $c'_n \geq 0$. De plus la suite $(1/(\ln n))$ est décroissante, et la fonction tangente est croissante sur $[0,\pi/2[$, donc (c'_n) est décroissante dès que $n \geq 3$. D'après le théorème des séries alternées, la série $(\sum c_n)$ est donc convergente.

Exercice 3

1. Appliquons la définition des sommes partielles et la définition de v_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}.$$

   On remarque alors que chaque terme u_i, avec $i \in \{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, apparaît exactement une fois dans le membre de droite. On reconnaît donc bien S_{2n+1}. En particulier si $(\sum u_n)$ converge, la suite (S_n) est convergente, donc sa sous-suite $(S_{2n+1}) = (T_n)$ est également convergente, ce qui revient à dire que $(\sum v_n)$ est convergente.
2. Lorsque $u_n = (-1)^n$ pour tout n, la série $(\sum u_n)$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. Par ailleurs on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 1 - 1 = 0.$$

   En particulier les sommes partielles de la série $(\sum v_n)$ sont toutes nulles, donc elle converge. Cela fournit donc un contre-exemple à l'implication réciproque de (1).
3. (a) Si la série $(\sum v_n)$ converge, la suite (T_n) de ses sommes partielles converge et en particulier elle est majorée. Or on a $(T_n) = (S_{2n+1})$ d'après la question 1.

   (b) Comme les u_n sont positifs, on a $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \geq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Grâce à la question (a), introduisons un majorant M de la suite (S_{2n+1}). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+1} \leq M$. D'après la question (b), on a également $S_{2n} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (S_n) est majorée par M. Comme la série $(\sum u_n)$ est à termes positifs, cela suffit à montrer qu'elle est convergente.