Université Denis Diderot 2002-2003
DEUG MIAS Info MT231 Groupe I23

Devoir surveillé n°2

mercredi 4 décembre

Exercice 1 Questions de cours.

1. Pour les fonctions suivantes, donner le développement en série entière en 0, et préciser sur quel intervalle il est valable :
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$,
   - $g :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1-x)$.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie.
   - Rappeler la définition des valeurs propres de f.
   - Énoncer un critère de diagonalisabilité pour f.

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -8 & 9 & 4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Trouver un vecteur propre de f associé à la valeur propre -3.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $(\sum u_n x^n)$.
   On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.
2. Montrer que f' est dérivable sur $]-R, R[$ et donner une expression simple de $xf'(x)$.
3. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe une constante K telle que

$$f(x) + f(1-x) + \ln(x)\ln(1-x) = K \quad \text{pour tout } x \text{ dans }]0,1[. \tag{E}$$

4. *Montrer que la formule* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ *définit une fonction* f *continue sur* $[0,1]$.
5. *En déduire que dans l'égalité* (E) *on a* $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *(ce qui vaut* $\frac{\pi^2}{6}$*).*

Barême et temps de travail indicatifs :

- Exercice 1 : 5 points, 10 minutes.
- Exercice 2 : 7,5 points, 30 minutes.
- Exercice 3 : 7,5 points, 30 minutes.