Université Denis Diderot — 2002-2003
DEUG MIAS Info MT231 — Groupe I23

Devoir surveillé n°2
Corrigé

Exercice 2 Calculons le polynôme caractéristique de f :

$$P = \begin{vmatrix} -3-X & 4 & 4 \\ -8 & 9-X & 4 \\ 8 & -4 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-X & 0 & 5-X \\ -8 & 9-X & 4 \\ 8 & -4 & 1-X \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-X & 0 & 0 \\ -8 & 9-X & 12 \\ 8 & -4 & -7-X \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1).$$

On développe alors par rapport à la première ligne :

$$P = (5-X)\begin{vmatrix} 9-X & 12 \\ -4 & -7-X \end{vmatrix} = (5-X)((9-X)(-7-X) - (-4)\times 12)$$
$$= (5-X)(X^2 - 2X - 15).$$

En étudiant au besoin le trinôme du second degré qui est apparu, on obtient

$$P = (5-X)(X-5)(X+3) = -(X+3)(X-5)^2.$$

En particulier le polynôme caractéristique de f est scindé. Étudions les valeurs propres une par une pour déterminer si f est diagonalisable. Pour la valeur propre -3, on remarque qu'on a $1 \leq \dim E_{-3}(f) \leq \mathrm{mult}_{-3}(P) = 1$, donc $\dim E_{-3}(f) = \mathrm{mult}_{-3}(P)$.

Pour la valeur propre 5, on a $\mathrm{mult}_5(P) = 2$ et on doit calculer la dimension de $E_5(f)$. Pour cela on considère la matrice

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les trois colonnes de cette matrice sont clairement non nulles et colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A-5I) = 1$. On conclut en utilisant le théorème du rang :

$$\dim E_5(f) = \dim\ker(f - 5\mathrm{id}) = 3 - \mathrm{rg}(f - 5\mathrm{id}) = 2 = \mathrm{mult}_5(P).$$

En résumé, le polynôme caractéristique P de f est scindé, et on a $\dim E_\lambda(f) = \mathrm{mult}_\lambda(P)$ pour toutes les valeurs propres λ de f, donc f est diagonalisable.

Cherchons pour finir un vecteur propre $v = (x,y,z)$ de f pour la valeur propre -3. On a

$$f(v) = -3v \iff (A+3I)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \iff \begin{cases} 4y + 4z = 0 \\ -8x + 12y + 4z = 0 \\ 8x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -y \\ -8x + 8y = 0 \\ 8x - 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ y = x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi le fait que $E_{-3}(f)$ est une droite, et on peut choisir $v = (1,1,-1)$ comme vecteur propre dirigeant cette droite.

Exercice 3

1. On a $\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$. Cette quantité converge vers $l = 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc le rayon de convergence recherché est $R = 1/l = 1$.
2. D'après le théorème de dérivation des séries entières, f est dérivable sur $]-R, R[$, et on a l'expression suivante de sa dérivée :

$$\forall\, x \in]-R, R[\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

   En multipliant par x, on reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, valable sur $]-1, 1[$. Ainsi $xf'(x) = -\ln(1-x)$ pour tout x dans $]-R, R[=]-1, 1[$.
3. L'expression $g(x)$ qui apparaît au membre de gauche de l'égalité (E) est dérivable sur $]0, 1[$ d'après la question précédente et les règles de calcul usuelles sur les dérivées. Il suffit donc de montrer que $g'(x)$ est nulle pour tout $x \in]0, 1[$. On a, en reportant l'expression de f' obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0. \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|u_n x^n| \leq n^{-2}$. Comme la série de terme général n^{-2} est une série de Riemann convergente, cela montre que la série de fonctions $(\sum u_n x^n)$ converge normalement sur $[0, 1]$. En particulier on peut encore poser $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ pour $x = 1$. Comme chaque fonction $(x \mapsto u_n x^n)$ est continue, la fonction somme f est également continue sur $[0, 1]$.
5. On fait tendre x vers 0 dans l'égalité (E). On a $\ln(x)\ln(1-x) \sim_0 -x\ln x \to_0 0$ et, par continuité de f, $f(x) \to_0 f(0)$ et $f(1-x) \to_0 f(1)$. On obtient ainsi

$$K = f(0) + f(1) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$