Devoir surveillé n°3
Corrigé

Exercice 2 Calculons le polynôme caractéristique de f, en développant par rapport à la première ligne :

$$\chi = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & 0 \\ 4 & -9-X & 12 \\ 2 & -3 & 3-X \end{vmatrix} = (-3-X)\begin{vmatrix} -9-X & 12 \\ -3 & 3-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+3)(X^2+6X+9) = -(X+3)^3.$$

L'endomorphisme f a donc bien une unique valeur propre, qui vaut -3. Calculons le sous-espace propre associé à cette valeur propre : un vecteur $v=(x,y,z)$ est dans $E_{-3}(f)$ si et seulement si $(f+3\mathrm{id})(v)=0$, soit encore en coordonnées

$$\begin{cases} 0=0 \\ 4x-6y+12z=0 \\ 2x-3y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x=\frac{3}{2}y-3z\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre $e_1=(3,2,0)$ et $e_2=(-3,0,1)$. Comme ce sont des vecteurs propres associés à la valeur propre -3, on a $f(e_1)=-3e_1$ et $f(e_2)=-3e_2$. L'image par f de $e_3=(1,0,0)$ se lit sur la matrice de f dans la base canonique : $f(e_3)=(-3,4,2)$, et il est facile de décomposer ce vecteur dans la nouvelle base : $f(e_3)=2e_1+2e_2-3e_3$. Par conséquent

$$T := \underset{(e_i)}{\mathrm{Mat}}\ f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel proposé s'écrit sous forme matricielle $X' = AX + te^{-3t}V$, où $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ est le vecteur colonne formé par les fonctions x, y, z, A est la matrice considérée au début de l'exercice, et V est le vecteur colonne de composantes 3, 2, 0. Effectuons le changement d'inconnue $X=PY$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1,e_2,e_3). D'après le théorème de changement de base et la définition de T, on a $A=PTP^{-1}$, d'où

$$PY' = PTP^{-1}PY + te^{-3t}V\ \Leftrightarrow\ Y' = TY + te^{-3t}P^{-1}V.$$

Remarquons que V est le premier vecteur colonne de la matrice P : on a donc

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V\ \Leftrightarrow\ P^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Appelons u, v et w les composantes de Y, d'apès les expressions de T et $P^{-1}V$ obtenue précédemment, l'équation différentielle vectorielle $Y' = TY + te^{-3t}P^{-1}V$ s'écrit sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} u' = -3u + 2w + te^{-3t} \\ v' = -3v + 2w \\ w' = -3w. \end{cases}$$

De la dernière équation on déduit l'existence d'une certaine constante c telle que $w(t) = ce^{-3t}$ pour tout t. En injectant cette expression dans la deuxième équation on obtient l'équation différentielle $v' = -3v + 2ce^{-3t}$ que l'on résoud par variation de la constante : on cherche v sous la forme $v(t) = g(t)e^{-3t}$ et on a alors

$$e^{-3t}g'(t) = 2ce^{-3t} \quad \text{d'où} \quad g(t) = 2ct + b$$

pour tout t et pour une certaine constante b. En revenant à v on obtient $v(t) = (2ct+b)e^{-3t}$ pour tout t. On procède de même pour u, qui vérifie l'équation différentielle $u' = -3u+2ce^{-3t}+te^{-3t}$: si $u(t) = f(t)e^{-3t}$ pour tout t, cette équation différentielle équivaut à

$$\forall\, t \;\; f'(t) = 2c + t \quad \text{d'où} \quad \forall\, t \;\; f(t) = a + 2ct + \frac{t^2}{2},$$

pour une certaine constance a. On revient de Y à X en multipliant à gauche par P :

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a + 2ct + \frac{t^2}{2})e^{-3t} \\ (b + 2ct)e^{-3t} \\ ce^{-3t} \end{pmatrix} \\ &= (a + 2ct + \frac{t^2}{2})e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (b + 2ct)e^{-3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + ce^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système est donné par les relations suivantes, où a, b et c sont trois constantes réelles :

$$\begin{cases} \forall\, t \;\; x(t) = (3a - 3b + c + \frac{3}{2}t^2)e^{-3t} \\ \forall\, t \;\; y(t) = (2a + 4ct + t^2)e^{-3t} \\ \forall\, t \;\; z(t) = (b + 2ct)e^{-3t}. \end{cases}$$