UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT — 2002-2003
DEUG MIAS INFO MT231 — GROUPE I23

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ est-il inversible ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces ? Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
4. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$? Donner une base de ce sous-espace et montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$.
5. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la formule :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = (2y + z, x - y - z, 2x - z).$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de A.
Quel est le rang de f ?
2. On pose $u = (-1, 2, 2)$, $v = (2, 0, -2)$ et $w = (1, -1, -2)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice B de f dans cette base.
3. Donner une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.
Calculer P^{-1} et vérifier la formule $P^{-1}AP = B$.

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT — 2002-2003
DEUG MIAS INFO MT231 — GROUPE I23

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ est-il inversible ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces ? Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
4. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$? Donner une base de ce sous-espace et montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$.
5. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la formule :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = (2y + z, x - y - z, 2x - z).$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de A.
Quel est le rang de f ?
2. On pose $u = (-1, 2, 2)$, $v = (2, 0, -2)$ et $w = (1, -1, -2)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice B de f dans cette base.
3. Donner une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.
Calculer P^{-1} et vérifier la formule $P^{-1}AP = B$.