SERIES ENTIERES

Exercice 1 Calculer le rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$(1)\ \frac{z^n}{n\pi^n} \qquad (2)\ (\log n)z^n \qquad (3)\ \frac{n^n}{n!}z^n \qquad (4)\ \frac{z^n}{2^{3n-2}} \qquad (5)\ \frac{3n^2-n-1}{n^2+5n+1}z^n.$$

Exercice 2 Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On note R et S les rayons de convergence respectifs des séries entières de termes généraux $a_n x^n$ et $b_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n^p x^n$, où p est un entier relatif fixé, est R^p.
2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^{pn}$, où p est un entier strictement positif fixé, est $R^{1/p}$.
3. On pose $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_n x^n$?

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = n(-2)^n$ et $b_n = (-2)^n$.
   (a) Montrer que les séries entières de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ ont le même rayon de convergence R, le calculer.
   (b) Donner une expression simple de $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pour tout $x \in]-R, R[$.
   (c) Pour tout $x \in]-R, R[$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   Ecrire sous forme de série entière la primitive de $(f+g)$ nulle en 0, notée h.
   (d) Montrer que $h(x) = xg(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
   (e) En déduire une expression de f sous forme de fraction rationnelle.
   (f) Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(8)}(0)$.
2. Calculer le rayon de convergence R des séries entières dont le terme général est donné ci-dessous. En utilisant les mêmes idées qu'à la question 1, calculer leur somme.

$$(a)\ n^2x^n \qquad (b)\ \frac{n^2+1}{n!}x^n \qquad (c)\ \frac{x^n}{(2n)!} \qquad (d)\ \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n.$$

Exercice 4 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes, et préciser les rayons de convergence correspondants :

$$f_1(x) = \log\left(\frac{1+2x^2}{1-x^2}\right), \qquad f_2(x) = \log(x+a), \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2-2x+2},$$

$$f_4(x) = e^x \cos x, \qquad f_5(x) = (\cos x)^3, \qquad f_6(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $(\sum f_n)$.
2. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge normalement sur $[-R, R]$.
3. Pour tout $x \in [-R, R]$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   Donner une expression simple de $f'(x)$, puis de $f(x)$, pour $x \in]-R, R[$.
4. Démontrer l'égalité
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\log 2 - 1.$$

Exercice 6 Pour tout $x \neq 1$, posons $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
   On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ce développement et R le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.
2. En calculant un produit de séries, montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Montrer que $R \geq 1$ et que $f(x) = \sum a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $R = 1$.

Exercice 7 Montrer qu'il existe une unique fonction f, développable en série entière, telle que $f(0) = 1$, et solution de l'équation différentielle
$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$
Quel est l'intervalle de définition de f ? Calculer f sur cet intervalle.

Exercice 8 Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par
$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Montrer que f est développable en série entière en 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$. En déduire le développement en série entière de f en 0.
3. Développer g en série entière sur $\mathbb{R}$. En déduire une expression de $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ sous forme de somme d'une série numérique.
4. En écrivant $f(1)$ de deux manières, démontrer l'égalité :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}.$$