SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-n^2x}}{1+n^2x}$.

1. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On dit que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est **simplement convergente sur** $\mathbb{R}_+$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \text{Sup}\ \{|f_n(x)|,\quad x \in \mathbb{R}_+\}$ et $x_0 = (-1+\sqrt{5})/2$.
   (a) Montrer que f_n atteint la valeur u_n en l'unique point x_0/n^2.
   (b) En déduire une expression simple de u_n en fonction de x_0 et n.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge. On dit que la série de fonction $(\sum f_n)$ est **normalement convergente sur** $\mathbb{R}_+$**.**
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la majoration suivante, en remarquant que $1 + n^2x \geq n^2x$:
$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$
5. Quelle est la nature de la série de terme général $1/n^2$? La majoration (1) suffit donc à montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente : c'est une démonstration plus simple que celle de la question 2.
6. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n = \text{Sup}\ \{|f_n(x)|,\quad x \in \mathbb{R}_+\}$. Calculer u_n.
3. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Exercice 3 Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle convergente en 0 ? Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. On fixe un réel strictement positif ε. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction inverse : $h(x) = 1/x$.
   – Montrer que la fonction h est bornée sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   – Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   – Montrer que la fonction f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.
3. Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes ? Justifier votre réponse.
   – La fonction h est bornée sur $]0, +\infty[$.
   – la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
   – La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

On dit que les propriétés « être bornée » ou « être normalement convergente » sont des propriétés **globales**, tandis que la propriété « être continue » est **locale**. La propriété « être dérivable » est également locale.

Exercice 4 Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$? On appelle f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$.
2. Soit a un réel strictement positif. Montrer que la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a, a]$.
3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n'(x) = 0$.

Exercice 5 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Etude de la série de fonctions $(\sum f_n)$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Calculer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
2. Etude de la série de fonctions $(\sum F_n)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $(\sum F_n)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Exprimer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ sous forme d'une somme de série.
3. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 6 On reprend les fonctions $f_n(x)$ de l'exercice 3, définies sur $\mathbb{R}_+$. On note f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Rappelons que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. On souhaite néanmoins calculer la limite de f en 0. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que f est positive et décroissante.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $S_n(x) \leq f(x)$.
3. Montrer qu'on a $S_n(\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2} H_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Quelle est la limite de la suite (H_n) ? En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, en utilisant les questions 1 et 4.