Université Denis Diderot 2002-2003
DEUG MIAS Info MT231 groupe I23

SERIES NUMERIQUES

Exercice 0

1. Soit a et b deux nombres réels. Calculer la limite de la suite (u_n) définie par la formule $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$.
2. On pose $v_n = \frac{n^{\log(n)}}{(\log n)^n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? de la suite (u_{n+1}/u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \log(n \cosh(\frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n}))$. Donner le développement asymptotique de v_n à l'ordre $1/n^4$.

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Soit $u_n = a_{2n}$ et $v_n = a_{2n+1}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 2 Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \qquad v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Quand la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 3

1. Montrer que $0,99999\ldots = 1$.
2. Trouver deux entiers positifs a et b tels que $a/b = 4,39393939\ldots$.

Exercice 4 Pour tout entier positif n, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n = \dfrac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$.
3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 5 Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$ la série de terme général $\frac{\operatorname{ch}(n)}{a^n}$ est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 6 Soit u_n une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}\cdot$

3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
   (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1 - v_n)$?
   (b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 7 Etudier la nature des séries dont voici le terme général :

(a) $\dfrac{1}{n \log n}$ **(b)** $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(c)** $\dfrac{n^{\log(n)}}{(\log n)^n}$ **(d)** $\dfrac{1 + \log(n)}{n^2}$

(e) $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **(f)** $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a(n+1)}$, $a \in \mathbb{R}$ **(g)** $(n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a}$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 8 Soient a, $b > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$.

1. Montrer que si $a \leq 1$ on a $\lim \frac{b^n + 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}} = 1$, et que si $a > 1$ on a $\lim \frac{b^n + 2^{\sqrt{n}}}{b^n} = 1$.
2. Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot$

1. Montrer que la série de terme général v_n est divergente.
2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de nombres complexes. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.
   (b) Si la série de terme général v_n est convergente, calculer sa somme.
2. On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un nombre réel. Montrer que la série de terme général v_n est convergente si et seulement si $\alpha > 2$. On pourra démontrer et utiliser l'encadrement
$$\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq u_n \leq \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse (c'est-à-dire démontrer l'énoncé s'il est vrai et trouver un contre-exemple s'il est faux).

1. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente
2. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.
4. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.
5. Si $\lim_{n\to+\infty} ((-1)^n n u_n) = 1$, alors la série de terme général u_n est convergente.
6. Si $\lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n n^2 u_n\right) = 1$, alors la série de terme général u_n est convergente.