Université Denis Diderot 2002-2003
DEUG MIAS Info MT231 Groupe I23

SERIES NUMERIQUES

Exercices d'entraînement

Exercice 1 *[facile]* Déterminer la nature des séries dont voici le terme général :

(a) $\dfrac{n+\ln n}{n^2+1}$ **(b)** $e^{-\sqrt{n}}$ **(c)** $\left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ **(d)** $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

(e) $\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$ **(f)** $n^2\sin(2^{-n})$ **(g)** $\dfrac{n2^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ **(h)** $\dfrac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n}$

Exercice 2 *[facile]*

1. On pose $a_n = \dfrac{1}{n^2-1/4}$ et $u_n = \dfrac{1}{n+1/2}$, pour tout entier strictement positif n.
   (a) Montrer que $a_n = u_{n-1} - u_n$.
   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge et donner sa somme.
2. On pose $b_n = \mathrm{Log}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $n > 1$.
   Montrer que la série de terme général b_n converge et calculer $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$.
   (On utilisera la même méthode qu'à la question 1.)

Exercice 3 *[facile]* Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $w_n = \max(u_n, v_n)$.

1. Montrer qu'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ les inégalités suivantes :

$$u_n \leq w_n \leq u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_n \leq w_n \leq u_n + v_n.$$

2. Montrer que la série de terme général w_n converge si et seulement si les séries de terme général u_n et v_n convergent toutes les deux.

Exercice 4 *[moyen]*

1. Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_n = \mathrm{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
   (a) Donner un équivalent de u_n. Que peut-on en conclure pour la convergence de la série de terme général u_n ?
   (b) On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?
   (c) Etudier la nature de la série de terme général $u_n - a_n$.
   (d) Montrer que la série de terme général u_n est divergente.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.
   (a) La série de terme général v_n est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
   (On utilisera la même méthode qu'à la question 1.)

Exercice 5 *[moyen]* Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \tag{1}$$

1. Montrer que l'on a $0 < u_{n+1} < u_n$ pour tout n. La suite (u_n) a-t-elle une limite ?
2. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente.
3. Montrer que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ a une limite, en utilisant l'équation de récurrence (1).
4. Démonter pour tout n l'inégalité

$$u_n - \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n - \frac{u_n}{1+u_0}.$$

5. En déduire que la limite de $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est strictement inférieure à 1.
6. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 6 *[difficile]* Soit u_n le terme général d'une série réelle convergente. On pose $v_n = nu_n$.

1. La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas nécessairement $u_n = o(\frac{1}{n})$.
2. On suppose que la suite (v_n) a une limite. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.
3. On suppose maintenant que la suite (u_n) est décroissante et positive.
   (a) Montrer que $nu_{2n} \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (v_{2n}), puis (v_{2n+1}), tend vers 0.
   (c) Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.